Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:
Gegeben seien die Polynome $p = X^3 - X + 2$ und $q = X^2 - 2X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Beweisen Sie, dass $K = \mathbb{Q}[X]/(p)$ ein Körper ist.

b) Bestimmen Sie das multiplikative Inverse der Restklasse $\overline{q}$ von q in K.

(7 Punkte)

Aufgabe 2:
Es sei $R = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right] \subset \mathbb{C}$ gegeben.

a) Fertigen Sie eine Skizze von R als Teilmenge der Gaußschen Zahlenebene $\mathbb{C}$ an.

b) Beweisen Sie, dass R mit der komplexen Norm $\|\cdot\|^2$ ein Euklidischer Ring ist.

c) Bestimmen Sie alle Einheiten von R.

d) Zerlegen Sie 3, 5 und 7 in Primfaktoren in R.

(8 Punkte)

Aufgabe 3:
Gegeben sei der Zerfällungskörper K des Polynoms $X^3 - 7 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Bestimmen Sie den Grad und die Galois-Gruppe G der Körpererweiterung $K \supset \mathbb{Q}$.

b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von G und die dazugehörigen Zwischenkörper.

(7 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei G eine *nicht* abelsche Gruppe der Ordnung 231.

a) Für welche Primzahl p sind die p-Sylowgruppen in G keine Normalteiler?

b) Sei p die Primzahl aus Teilaufgabe a und sei S eine p-Sylowgruppe. Bestimmen Sie den Isomorphietyp des Normalisators $N(S) = \{\, g \in G \mid gsg^{-1} \in S \text{ für alle } s \in S \,\}$ von S in G.

c) Können Sie G mit Hilfe der Teilaufgaben a und b als semidirektes Produkt zyklischer Gruppen schreiben?

(8 Punkte)

- 3 -