Thema Nr. 3

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.*

Aufgabe 1 (7 Punkte):

a) Bestimmen Sie alle Isomorphietypen abelscher Gruppen mit 56 Elementen!

b) Zeigen Sie: Jede Gruppe mit 56 Elementen enthält eine normale Sylowuntergruppe $\neq 1$.

c) Zeigen Sie: Enthält eine solche Gruppe G mit 56 Elementen eine nicht-normale 7-Sylowuntergruppe H und bezeichnet K die 2- Sylowuntergruppe in G, so ist $K \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

[Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der Zentralisator von K in H trivial ist und folgern Sie daraus, dass H auf den Elementen $\neq 1$ von K transitiv operiert.]

Aufgabe 2 (9 Punkte):

Es sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung

$$N: R \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad , \quad a + b\sqrt{2} \mapsto |a^2 - 2b^2|$$

ist multiplikativ.

b) R ist ein euklidischer Ring bezüglich N.

c) Ein Element $r \in R$ ist genau dann eine Einheit, wenn $N(r) = 1$ ist.

d) R besitzt unendlich viele Einheiten.

e) Zerlegen Sie das Element 21 in R in Primfaktoren.

Aufgabe 3 (7 Punkte):

Geben Sie alle Lösungen X der Gleichung

$$X^7 = \mathbb{1}_5$$

in der Gruppe $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Q})$ an (mit Begründung).

Aufgabe 4 (7 Punkte):

a) Geben Sie ein Verfahren an, um mit Zirkel und Lineal zu einem gegebenen Dreieck ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt zu konstruieren!

b) Sei α eine algebraische Zahl vom Grad 4 über $\mathbb{Q}$ und N der normale Abschluss von $\mathbb{Q}(\alpha)$. Zeigen Sie: Wenn $\mathrm{Gal}(N|\mathbb{Q})$ isomorph zur alternierenden Gruppe A_4 ist, kann α nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.