## Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

**Vorbemerkung:** *Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.*

**Aufgabe 1** (6 Punkte):

Zeigen Sie, dass es zwei nichtisomorphe nichtabelsche Gruppen der Ordnung 20 gibt!

**Aufgabe 2** (6 Punkte):

Sei $G$ eine endliche Gruppe. Zeigen Sie:

a) Ist $\mathrm{Aut}(G)$ zyklisch, so ist $G$ abelsch.

b) Ist $|\mathrm{Aut}(G)| = 2$, so ist $G$ zyklisch der Ordnung 3, 4 oder 6.

**Aufgabe 3** (6 Punkte):

Sei $R$ ein (nullteilerfreier, kommutativer) Hauptidealring und $I = Ra$ ein von $\{0\}$ verschiedenes Ideal von $R$. Zeigen Sie, dass $I$ nur in endlich vielen Idealen von $R$ enthalten ist!

**Aufgabe 4** (6 Punkte):

Zeigen Sie, dass das Polynom

$$f(X) = X^3 + X^2 - 2X - 1$$

in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist, und bestimmen Sie den Isomorphie-Typ seiner Galoisgruppe!

**Aufgabe 5** (6 Punkte):

Sei $K$ ein endlicher Körper und $L|K$ eine endliche Erweiterung mit Galoisgruppe $G$. Zeigen Sie, dass $L|K$ eine Normalbasis besitzt, d.h. zeigen Sie die Existenz eines $\alpha \in L$ mit

$$L = \sum_{\sigma \in G} K\sigma(\alpha) \quad .$$