

Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.

Aufgabe 1 (6 Punkte):

Beweisen Sie oder widerlegen Sie:

- $\sqrt{35}$ ist irrational.
- Es gibt unendlich viele Primzahlen.
- Für unendlich viele ganze Zahlen n sind die beiden Zahlen $77n + 1$ und $143n + 2$ nicht teilerfremd.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und sei S_n die Gruppe der Permutationen von $\{1, 2, \dots, n\}$. Es bezeichne α den n -Zyklus $(1, 2, \dots, n)$ und H die von α erzeugte Untergruppe in S_n , ferner sei

$$G = \{\sigma \in S_n; \sigma(n) = n\} .$$

Zeigen Sie:

- Die Multiplikationsabbildung

$$H \times G \rightarrow S_n \quad , \quad (\alpha^\ell, \sigma) \mapsto \alpha^\ell \sigma$$

ist bijektiv.

- Für $n \geq 4$ ist H kein Normalteiler von S_n .
- Zu jedem $\sigma \in G$ und jedem ℓ mit $1 \leq \ell \leq n$ existiert ein $\rho \in G$ mit $\sigma \alpha^\ell = \alpha^{\sigma(\ell)} \rho$.

Aufgabe 3 (8 Punkte):

Sei p eine Primzahl, sei $\zeta = \exp \frac{2\pi i}{p}$ und sei R der kleinste Unterring von \mathbb{C} , der \mathbb{Z} und ζ enthält. Zeigen Sie:

- $1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{p-2}$ ist eine \mathbb{Z} -Basis von R .
- Sei $a \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es einen Ringisomorphismus

$$\mathbb{Z} / \left(\sum_{\ell=0}^{p-1} a^\ell \right) \xrightarrow{\cong} R / (a - \zeta) .$$

- $2 - \zeta$ ist genau dann Primelement in R , wenn $2^p - 1$ Primzahl ist.

Aufgabe 4 (8 Punkte):

Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $X^7 + 1 - i$ über $\mathbb{Q}(i)$, wobei $i^2 = -1$ sei. Für natürliche Zahlen n sei $\zeta_n = \exp \frac{2\pi i}{n}$. Zeigen Sie:

- a) $\mathbb{Q}(\zeta_7, i) = \mathbb{Q}(\zeta_{28})$ und $[\mathbb{Q}(\zeta_7, i) : \mathbb{Q}(i)] = 6$.
- b) $[L : \mathbb{Q}(i)] = 42$.
- c) L ist abgeschlossen unter der komplexen Konjugation.
- d) L ist Galoiserweiterung von \mathbb{Q} .