Thema Nr. 3

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.*

Aufgabe 1:

Sei G eine Gruppe der Ordnung p^2q, wobei p und q Primzahlen bezeichnen. Zeigen Sie, dass G einen nichttrivialen Normalteiler hat.

Aufgabe 2:

a) Sei p eine Primzahl und $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $p \nmid a$. Zeigen Sie, dass die Kongruenz

$$x^2 - ay^2 \equiv b \text{ mod } p$$

eine Lösung in ganzen Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ hat.

[Hinweis: Zählen Sie die Elemente der Form $ay^2 + b$ in $\mathbb{F}_p$.]

b) Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x^2 - 43y^2 = 29$$

keine Lösung in ganzen Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ hat.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie den Isomorphietyp der Galoisgruppe des Polynoms $f(X) = X^5 - 4X + 2$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 4:

Sei K eine Galoiserweiterung von k und $a \in K$ ein Element, für das $\sigma(a) \neq a$ für alle Automorphismen $\sigma \neq 1$ der Galoisgruppe von K über k gilt. Zeigen Sie, dass $K = k(a)$ gilt.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie alle Zwischenkörper der Erweiterung $\mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{5}\right)$ von $\mathbb{Q}$.