Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 24 Punkte. Begründen Sie alle Schlussweisen und die entscheidenden Rechenschritte durch einen kurzen Text.*

Aufgabe 1:

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $n > 1$, sei p der kleinste Primteiler von n und P eine zyklische, normale p-Sylowgruppe von G.

a) Zeigen Sie: Ist p^m die Ordnung von P, so ist $p^{m-1}(p-1)$ die Ordnung der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(P)$ von P.

b) Die Konjugation von G auf P liefert einen Homomorphismus

$$\alpha : G \to \mathrm{Aut}(P) \quad , \alpha(g) : x \mapsto gxg^{-1}$$

für $g \in G$ und $x \in P$.
Zeigen Sie: Der Index $[G : \text{Kern } \alpha]$ ist ein Teiler von $p^{m-1}(p-1)$ und nicht durch p teilbar.

c) Zeigen Sie, dass P im Zentrum von G enthalten ist.

Aufgabe 2:

Sei R der Unterring des Matrizenringes $\mathbb{Q}^{2\times 2}$, der aus den Matrizen $\begin{pmatrix} z & a \\ 0 & z \end{pmatrix}$ mit $z \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{Q}$ besteht.

a) Zeigen Sie, dass jedes Primideal von R die Elemente

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ für } a \in \mathbb{Q}$$

enthält, und dass diese Elemente ein Ideal N von R bilden, für das $R/N \simeq \mathbb{Z}$ gilt.

b) Bestimmen Sie alle Primideale von R.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Sei F der Körper mit zwei Elementen. Zeigen Sie:

a) Ist n > 1 eine natürliche Zahl, ist $2^n - 1$ eine Primzahl und ist $f \in F[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad n, dann erzeugt die Restklasse $X + (f)$ die multiplikative Gruppe des Körpers $F[X]/(f)$.

b) Für $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in F[X]$ ist $K = F[X]/(g)$ ein Körper, und die Restklasse $X + (g)$ in $K^\times$ hat die Ordnung 5.

Aufgabe 4:

Gegeben sei das Element $z = X^2 + X^{-2}$ des rationalen Funktionenkörpers $\mathbb{Q}(X)$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(X)$ über $\mathbb{Q}(z)$ endlich vom Grad ≤ 4 ist.

b) Bestimmen Sie die Gruppe aller Automorphismen von $\mathbb{Q}(X)$, die z festlassen.

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(X)$ über $\mathbb{Q}(z)$ galoissch ist und geben Sie alle Körper zwischen $\mathbb{Q}(X)$ und $\mathbb{Q}(z)$ an.