Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Schlussweisen und die entscheidenden Rechenschritte durch einen kurzen Text.*

Aufgabe 1:

a) Definieren Sie die alternierende Gruppe A_n.
b) Warum ist A_n für $n \geq 2$ eine Untergruppe vom Index 2 in S_n ?
c) Zeigen Sie, dass die Gruppe S_4 auflösbar ist.

Aufgabe 2:

Sei K ein Teilkörper von $\mathbb{C}$, der über $\mathbb{Q}$ von endlichem Grad n ist. Zeigen Sie: Ist n ungerade und K normal über $\mathbb{Q}$, so gilt $K \subset \mathbb{R}$.

Aufgabe 3:

Es seien p und q Primzahlen. Warum zerfällt das Polynom

$$f(X) = X^{p^q} - X$$

über dem Körper $\mathbb{F}_p$ mit p Elementen in p verschiedene Faktoren vom Grad 1 und in $\dfrac{p^q - p}{q}$ verschiedene irreduzible Faktoren von Grad q ?

[Hinweis: Die Faktoren müssen nicht angegeben werden! Zum Einstieg in die Aufgabe überlege man, dass die Nullstellen von f einen Körper bilden.]

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Sei $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ der Hauptidealring der ganzen Gaußschen Zahlen mit $i^2 = -1$, sei $\mathrm{N} : \mathrm{R} \to \mathbb{Z}$ die komplexe Norm $\mathrm{N}(a + b\,i) = a^2 + b^2$.

a) Zeigen Sie, dass 11 ein Primelement und 13 kein Primelement in R ist.

b) Zeigen Sie, dass $11R$ ein maximales Ideal in R ist, und zerlegen Sie $13R$ in ein Produkt von zwei maximalen Idealen.

c) Welche Ordnung und welche Struktur hat die Gruppe $(R/11R)^\times$ der teilerfremden Restklassen modulo 11 in R?

d) Welche Ordnung und welche Struktur hat die Gruppe $(R/13R)^\times$ der teilerfremden Restklassen modulo 13 in R?

[Hinweis: Der Chinesische Restsatz kann nützlich sein.]

Aufgabe 5:

Zeigen Sie die Irreduzibilität der folgenden Polynome f über $\mathbb{Z}$:

a) $f = X^p + pX - 1$ für jede Primzahl p

b) $f = X^4 - 42X^2 + 1$