Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 24 Punkte. Begründen Sie alle Schlussweisen und die entscheidenden Rechenschritte durch einen kurzen Text.*

Aufgabe 1:

Sei G eine Gruppe der Ordnung n. Zeigen Sie:

a) G ist isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n.

b) Ist $n = 2u$ mit ungeradem u, so hat G einen Normalteiler vom Index 2.

Aufgabe 2:

Beweisen Sie

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Aufgabe 3:

Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Ist p eine Primzahl, sind $1 \leq i \leq j$ natürliche Zahlen, sind K bzw. L Körper mit p^i bzw. p^j Elementen, so ist K zu einem Teilkörper von L isomorph.

b) Für jede Primzahl p und jede natürliche Zahl a gilt:
Ist $X^2 \equiv a \bmod p$ lösbar in $\mathbb{Z}$, so auch $X^4 \equiv a \bmod p$.

c) Die Zahl $\zeta_{13} = e^{2\pi i/13}$ ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

d) Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ algebraische Zahlen, sei $K_i = \mathbb{Q}(\alpha_i)$ für $i = 1,2$, sei $L = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$ und es gelte $K_1 \cap K_2 = \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$[L:\mathbb{Q}] \quad \text{teilt} \quad [K_1:\mathbb{Q}]\cdot[K_2:\mathbb{Q}].$$

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper mit 81 Elementen, sei G die Gruppe aller Automorphismen von K. Bestimmen Sie:

a) die Längen der Bahnen der Operation von G auf K, sowie

b) die Anzahl der Bahnen gegebener Länge.