Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring (mit 1).

(a) Geben Sie die Definition eines *größten gemeinsamen Teilers* zweier Elemente $a, b \in R$ an.

(b) Begründen Sie, dass in einem faktoriellen Ring je zwei Elemente einen größten gemeinsamen Teiler haben.

(c) Begründen Sie, dass je zwei Elemente des Polynomrings $\mathbb{Q}[x, y]$ einen größten gemeinsamen Teiler haben.

Zwei Elemente $a, b \in R$ heißen *teilerfremd*, wenn 1 ein größter gemeinsamer Teiler von a und b ist. Sie heißen *relativ prim*, wenn es $u, v \in R$ gibt mit $ua + vb = 1$.

(d) Zeigen Sie: Sind $a, b \in R$ relativ prim, dann sind sie auch teilerfremd.

(e) Geben Sie zwei Elemente $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$ an, die teilerfremd sind, aber nicht relativ prim.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Sei V ein unendlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, auf dem eine positiv definite symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert ist. Wir schreiben $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ für $v \in V$.

Es seien $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Zeigen Sie: Der Schwerpunkt $s = \frac{1}{n}(v_1 + v_2 + \ldots + v_n)$ ist das eindeutig bestimmte Element $v \in V$, für das $\sum_{j=1}^{n} \|v - v_j\|^2$ minimal wird.

Hinweis: Schreiben Sie v als $v = s + w$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei K ein Körper. Für Polynome $f, g \in K[x]$ sei $f \circ g$ das Polynom $f(g(x))$.

Beweisen Sie oder wiederlegen Sie durch ein Gegenbeispiel, ob folgende Aussagen für alle Körper K richtig sind.

(a) $\forall f, g \in K[x]$: (f irreduzibel $\Longrightarrow$ $f \circ g$ irreduzibel).

(b) $\forall f, g \in K[x]$: ($f \circ g$ irreduzibel $\Longrightarrow$ f irreduzibel).

(c) $\forall f, g \in K[x]$: ($f \circ g$ irreduzibel $\Longrightarrow$ g irreduzibel).

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (12 Punkte)

(a) Wir betrachten die additiven Gruppen $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Zeigen Sie: Die Faktorgruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist unendlich, aber jede endlich erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist endlich.

(b) Sei $A = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto ax + b \mid a = \pm 1, b \in \mathbb{Z}\}$.

Zeigen Sie: A ist eine Gruppe mit der Hintereinanderschaltung von Abbildungen als Verknüpfung, und diese Gruppe ist isomorph zum semidirekten Produkt der (additiven) Gruppe $\mathbb{Z}$ mit der (multiplikativen) Gruppe $\{\pm 1\}$, wobei $\{\pm 1\}$ auf $\mathbb{Z}$ durch Multiplikation operiert.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{C}$, wobei K eine galoissche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ vom Grad 2021 ist. Zeigen Sie:

(a) Es gibt Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset L_j \subset K$, $j \in \{1, 2\}$, mit $[L_1 : \mathbb{Q}] = 43$ und $[L_2 : \mathbb{Q}] = 47$, die über $\mathbb{Q}$ galoissch sind.

(b) Sei $\alpha \in K$, sodass $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ gilt, und sei f das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$. Dann zerfällt f über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren.