Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Es sei $f = X^4 + aX + 2 \in \mathbb{Z}[X]$.

(a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{Z}$, für die f eine rationale Nullstelle besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass f für kein $a \in \mathbb{Z}$ in zwei quadratische Faktoren aus $\mathbb{Z}[X]$ zerfällt.

(c) Beweisen Sie: Der Restklassenring $\mathbb{Q}[X]/(f)$ ist, abhängig von a, entweder ein Körper oder isomorph zu einem direkten Produkt $K_1 \times K_2$ von zwei Körpern, die die Grade 1 bzw. 3 über $\mathbb{Q}$ haben und geben Sie an, für welche Werte von a die jeweiligen Fälle eintreten.

Aufgabe 2:
Es sei U eine Untergruppe einer endlichen einfachen Gruppe G vom Index $n := (G : U) \geq 3$.

(a) Zeigen Sie, dass G isomorph zu einer Untergruppe der S_n ist.
Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Operation von G.

(b) Zeigen Sie, dass $|G|$ ein Teiler von $n!/2$ ist.

(c) Begründen Sie, ob die alternierende Gruppe A_5 eine Untergruppe der Ordnung 15 besitzt.

Aufgabe 3:
Sei R ein Ring mit 1, und seien $a, b \in R$. Es gelte $ab = 1$ und $ba \neq 1$. Insbesondere ist R also nicht kommutativ. Ein Element x in R heißt *nilpotent*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x^n = 0$. Ein Element x in R heißt *idempotent*, falls $x^2 = x$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass das Element $1 - ba$ idempotent ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Element $b^n(1 - ba)$ für $n \geq 1$ nilpotent ist.

(c) Zeigen Sie, dass es unendlich viele nilpotente Elemente in R gibt.

Aufgabe 4:
Es sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit 3 Elementen. Sei I das von $X^2 + 1$ im Polynomring $R = \mathbb{F}_3[X]$ erzeugte Ideal.

(a) Zeigen Sie, dass $K := R/I$ ein Körper ist und ermitteln Sie die Anzahl der Elemente von K.

(b) Geben Sie eine Formel an für das multiplikative Inverse des Elements $aX + b + I$ in R/I für $a, b \in \mathbb{F}_3$, falls es existiert.

(c) Geben Sie einen Erzeuger an für die multiplikative Gruppe $K^\times$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:
Gegeben ist das Polynom $f = X^3 - 3\,X^2 + 3\,X - 6 \in \mathbb{Q}[X]$. Weiter sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$ eine primitive dritte Einheitswurzel.

(a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $a_k = 1 + \zeta^k \sqrt[3]{5}$ für $k = 0,\, 1,\, 2$ die drei verschiedenen komplexen Wurzeln von f sind.

(c) Zeigen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \zeta) \subseteq \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von f ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.