Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

(a) Bestimmen Sie das $a \in \{0, 1 \ldots, 6\}$ mit $3^{2020} \equiv a \bmod 7$.

Hinweis: Benutzen Sie den kleinen Satz von Fermat.

(b) Zeigen Sie, dass die Diedergruppe $D_4 = \{\sigma^k \delta^l \mid k \in \{0,1\},\ l \in \{0, 1, 2, 3\}\}$ mit 8 Elementen (es gilt $\sigma^2 = e = \delta^4$ und $\sigma \delta \sigma^{-1} = \delta^{-1}$) nicht isomorph zur Quaternionengruppe $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ (es gilt $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$) ist.

(c) Bestimmen Sie eine zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ähnliche Diagonalmatrix D sowie eine invertierbare Matrix S mit $D = S^{-1} A S$.

(d) Bestimmen Sie alle erzeugenden Elemente der Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$.

Aufgabe 2:

Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge S operiert. Dann heißt die Operation transitiv, falls es zu jedem Paar von Elementen $s, s' \in S$ ein $g \in G$ mit $gs = s'$ gibt. Zeigen Sie:

(a) Die übliche Operation von $GL_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist transitiv. (Hinweis: Betrachte die Bahn von $v = (1, 0)$).

(b) Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $|G| \geq 3$. Dann ist die Operation von G auf $G \setminus \{e\}$ durch Konjugation nicht transitiv.

Aufgabe 3:

Sei p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathbb{F}_p[X]$ irreduzibel vom Grad n. Man bestimme diejenigen $m \in \mathbb{N}$, für die f über $\mathbb{F}_{p^m}$ in Linearfaktoren zerfällt.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:
Sei k ein Körper und $G = \langle g \rangle$ eine von g erzeugte zyklische Gruppe der Ordnung $n \geq 2$. Der Gruppenring kG ist die Menge aller Summen $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i g^i$ ($\alpha_i \in k$). Fakt: Die Menge kG ist bezüglich der Operationen

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i g^i) + (\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i g^i) &= \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_i + \beta_i) g^i \\
(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i g^i) \cdot (\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i g^i) &= \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k g^k, \quad \gamma_k = \sum_{i+j \equiv k \bmod n} \alpha_i \beta_j
\end{aligned}$$

ein assoziativer, kommutativer Ring mit Einselement $1 = 1_k \cdot 1_G$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt einen surjektiven Ringhomomorphismus $\phi : k[X] \to kG$,

(b) $kG \cong k[X]/(X^n - 1)$,

(c) kG ist kein Integritätsbereich.

Aufgabe 5:
Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und sei p eine Primzahl. Angenommen, p teilt den Grad jeder endlichen Körpererweiterung L/K mit $K \subsetneq L$. Zeigen Sie, dass dann der Grad jeder endlichen Körpererweiterung von K eine Potenz von p ist. (Hinweis: Zeigen Sie, dass es eine endliche Galoiserweiterung E/K mit $K \subseteq L \subseteq E$ gibt, und verwenden Sie die Sylowsätze).