

Thema Nr. 1
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

- (a) Entscheiden Sie, ob es eine Potenz von 7 gibt, die mit den Ziffern 11 endet und begründen Sie Ihre Entscheidung.
- (b) Ermitteln Sie die kleinste Potenz von 7, die auf 001 endet.
- (c) Bestimmen Sie die letzten vier Ziffern von 7^{2020} .

Aufgabe 2:

- (a) Begründen Sie für jeden der folgenden vier Ringe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_2[x]/\langle x^2 \rangle$ und $\mathbb{F}_2[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle$, ob er ein Körper ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die vier Ringe aus Teilaufgabe a) paarweise nicht isomorph sind.

Aufgabe 3:

Sei $V = \text{Mat}_2(\mathbb{Q})$ der \mathbb{Q} -Vektorraum der 2×2 Matrizen über \mathbb{Q} und sei $\phi : V \rightarrow V$ die Linksmultiplikation mit der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Zeigen Sie, dass ϕ eine \mathbb{Q} -lineare Abbildung ist.
- (b) Entscheiden Sie, ob das charakteristische Polynom von ϕ ist.
- (b) Entscheiden Sie, ob das Minimalpolynom von ϕ ist.

Aufgabe 4:

Sei G eine Gruppe und sei H die Untergruppe von G , die aus allen Produkten von Elementen der Form g^2 mit $g \in G$ besteht.

- (a) Bestimmen Sie H im Fall der alternierenden Gruppe $G = A_4$.
- (b) Bestimmen Sie H im Fall der symmetrischen Gruppe $G = S_4$.
- (c) Zeigen Sie $H \neq G$, falls G eine Untergruppe vom Index zwei besitzt.

Aufgabe 5:

Sei $\omega = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$.

- (a) Zeigen Sie, dass ω eine primitive sechste Einheitswurzel ist.
- (b) Entscheiden Sie, ob $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[3]{5})$ eine galoissche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ ist.
- (c) Entscheiden Sie, ob $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[6]{2})$ eine galoissche Körpererweiterung von \mathbb{Q} ist.
- (d) Finden Sie galoissche Körpererweiterungen L/K und K/\mathbb{Q} , so dass L/\mathbb{Q} nicht galoissch ist.
Hinweis: Betrachten Sie $\sqrt[4]{2}$.