Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Seien G und G' Gruppen und $f: G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus.

(a) Definieren Sie den Begriff *Normalteiler.*

(b) Sei K der Kern von f und sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass

$$f^{-1}(f(H)) = HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$$

ist.

(c) Sei G eine Gruppe und seien H und K Normalteiler in G mit der Eigenschaft $H \cap K = \{e_G\}$. Zeigen Sie, dass $kh = hk$ gilt für alle $h \in H$ und $k \in K$.

(d) Geben Sie ein Beispiel (U, G) mit einer Gruppe G und einer Untergruppe U von G, die kein Normalteiler ist.

Aufgabe 2:
Berechnen Sie die letzten beiden Ziffern der Zahl

$$2018^{(2019^{2020})} \; .$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Berechnen Sie die Klasse von $2018^{(2019^{2020})}$ in $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie, dass $[2018^{(2019^{2020})}] = 0$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ gilt.

(c) Schließen Sie die Berechnung mithilfe des Chinesischen Restsatzes ab.

Aufgabe 3:
Sei p eine Primzahl, $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen und $V = \mathbb{F}_p^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ eine Gruppe, deren Ordnung eine Potenz von p ist.
Man zeige, dass es einen Vektor $0 \neq v \in \mathbb{F}_p^n$ gibt mit $gv = v$ für alle $g \in G$.
(Hinweis: $|V \setminus \{0\}|$ ist nicht durch p teilbar.)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:
Seien K ein Körper und $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung.

(a) Wir betrachten Zwischenkörper M und M' von $L|K$ und ein Element σ in $\mathrm{Gal}(L|K)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) $\sigma(M) = M'$

(ii) $\sigma\,\mathrm{Gal}(L|M)\sigma^{-1} = \mathrm{Gal}(L|M')$

(b) Seien L der Zerfällungskörper eines irreduziblen Polynoms f in $K[x]$ und α und β Nullstellen von f in L. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppen $\mathrm{Gal}(L|K(\alpha))$ und $\mathrm{Gal}(L|K(\beta))$ zueinander isomorph sind.

(c) Zeigen Sie, dass man in (b) die Voraussetzung, dass f irreduzibel ist, nicht weglassen kann.

Aufgabe 5:
Wir betrachten das Polynom $f_1 := x^5 + 10x + 5$ in $\mathbb{Q}[x]$ und definieren induktiv Polynome $f_n(x) := f_1(f_{n-1}(x))$ für n in $\mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass die Polynome f_n für alle n in $\mathbb{N}$ irreduzibel sind. Zeigen Sie dazu folgende Zwischenschritte durch Induktion nach n:

(a) f_n liegt in $\mathbb{Z}[x]$ und die Klasse von f_n in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$ ist durch x^{5^n} gegeben.

(b) Zeigen Sie, dass die Klasse von $f_n(0)$ in $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ nicht verschwindet.