

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ seien a_0, a_1, a_2 die Koeffizienten des Polynoms

$$f(X) := (X - \lambda_1) \cdot (X - \lambda_2) \cdot (X - \lambda_3) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X].$$

Ferner sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$$

die sogenannte Begleitmatrix zu den gegebenen Zahlen. Zeigen Sie:

- (a) Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
- (b) Die Jordan'sche Normalform von A hat für jeden Eigenwert λ genau ein Jordan-Kästchen.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie:

- (a) Ist $n = dm$ mit ungeradem $m \in \mathbb{N}$, so gilt die Teilbarkeitsrelation $(X^d + 1) \mid (X^n + 1)$.
- (b) Das Polynom $X^n + 1$ ist genau dann über \mathbb{Q} irreduzibel, wenn $n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Aufgabe 3:

Seien p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_{p^k}$ eine Körpererweiterung vom Grad k über dem Körper \mathbb{F}_p . Betrachten Sie die Gruppe $G := \text{GL}_2(\mathbb{F}_{p^k})$ der invertierbaren 2×2 -Matrizen über \mathbb{F}_{p^k} . Zeigen Sie:

- (a) Die Teilmenge $N := \{A \in G \mid \det(A) \in \mathbb{F}_p\} \subset G$ ist ein Normalteiler.
- (b) Der Index des Normalteilers N ist teilerfremd zu p .
- (c) Die p -Sylowgruppen von G sind genau die p -Sylowgruppen von N .

Aufgabe 4:

- (a) Sei $h : A \rightarrow G$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus einer abelschen Gruppe A in eine Gruppe G . Zeigen Sie, dass dann auch G abelsch ist.
- (b) Sei p eine Primzahl, $p \neq 2$. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen des Polynoms $f(X) = X^2 + 2X + 1$ in \mathbb{F}_{p^2} und in $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.
- (c) Man zeige oder widerlege folgende Aussage: Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt

$$\text{ggT}(a, b, c) \text{ kgV}(a, b, c) = abc.$$

Aufgabe 5:

Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von $X^8 - 2$. Sei ferner $\zeta := \exp(\frac{2\pi i}{8}) \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

- (a) Es gilt $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\zeta)$.
- (b) Die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset L$ hat den Grad $[L : \mathbb{Q}] = 16$.
- (c) Die Galoisgruppe $G = \text{Gal}(L|\mathbb{Q})$ ist nicht abelsch und hat einen Normalteiler N der Ordnung 4 mit $N \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.