Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**
Sei $K$ ein Körper und $V = K^{2\times 2}$ der $K$-Vektorraum der $2 \times 2$-Matrizen über $K$. Für $A, B \in K^{2\times 2}$ betrachten wir die Abbildung $\Phi\colon V \to V$, $X \mapsto AXB$.
Zeigen Sie:

(a) $\Phi$ ist ein Endomorphismus von $V$.

(b) $\mathrm{Spur}(\Phi) = \mathrm{Spur}(A)\,\mathrm{Spur}(B)$.

**Aufgabe 2:**
Seien $R = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ und $f\colon R \to R$, $x \mapsto 7x$.

(a) Zeigen Sie, dass $f$ bijektiv und damit eine Permutation von $R$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Fixpunkte von $f$.

(c) Bestimmen Sie die Anzahl der Bahnen der Operation von $\langle f \rangle$ auf $R$.
Hier steht $\langle f \rangle$ für die von $f$ erzeugte Untergruppe der Gruppe der Permutationen von $R$.

**Aufgabe 3:**

(a) Geben Sie die Definition einer *auflösbaren Gruppe* an.

(b) Zeigen Sie: Jede Gruppe $G$ der Ordnung 2020 ist auflösbar.

(c) Geben Sie zwei nicht-isomorphe abelsche und zwei nicht-isomorphe nicht-abelsche Gruppen der Ordnung 2020 an (mit Begründung).

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 4:**

Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive elfte Einheitswurzel und $K = \mathbb{Q}(\zeta)$.

(a) Zeigen Sie: $K$ ist der Zerfällungskörper von $X^{11} - 1$ über $\mathbb{Q}$ und geben Sie den Isomorphietyp der Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ an.

(b) Zeigen Sie: Es gibt eine galoissche Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$ mit $[L : \mathbb{Q}] = 5$.

**Aufgabe 5:**

Ein $n$-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ von ganzen Zahlen heiße *hübsch*, wenn $a_i a_j + 2$ eine Quadratzahl ist für alle $1 \leq i < j \leq n$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt hübsche Tripel.

(b) Wenn ein Quadrupel hübsch ist, dann ist keine der Zahlen $a_j$ (j=1,...,4) durch 4 teilbar.

(c) Es gibt keine hübschen Quadrupel.