Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei $L|\mathbb{Q}$ eine endliche Galois'sche Körpererweiterung. Die Norm eines Elements $x \in L$ sei gegeben als

$$N(x) := \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})} \sigma(x) .$$

1. Zeigen Sie, dass $N(x) \in \mathbb{Q}$ für alle $x \in L$ und $N(xy) = N(x)N(y)$ für alle $x, y \in L$ gilt.
2. Betrachten Sie den Spezialfall $L = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$. Zeigen Sie, dass $N(r+\sqrt{5}s) = r^2 - 5s^2$ für $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt.
3. Betrachten Sie in L den Teilring $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{r + s\sqrt{5} \mid r, s \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ gilt, dass x genau dann eine Einheit in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ist, wenn $N(x) \in \{1, -1\}$ gilt.
4. Zeigen Sie, dass 11 kein Primelement in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ist.

(12 Punkte)

Aufgabe 2:

Betrachten Sie die Körpererweiterung $L := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{3}}) \subset \mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$. Sei $x := \sqrt{2+\sqrt{3}} \in L$.

1. Zeigen Sie, dass $x - \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2}$ gilt.
2. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von x über $\mathbb{Q}$.
3. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von x über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
4. Bestimmen Sie die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$.

(12 Punkte)

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 300 gibt.
Hinweis: Nehmen Sie an, es gäbe so eine Gruppe, und lassen Sie diese auf ihren 5-Sylowgruppen operieren.

(12 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $N \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl $N \geq 3$.

1. Zeigen Sie: Falls $2^{N-1} \not\equiv 1 \bmod N$ gilt, ist N keine Primzahl.
2. Zeigen Sie, dass die Umkehrung der Aussage nicht gilt, indem Sie das Beispiel $N = 341 = 11 \cdot 31$ betrachten.

(12 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Es seien p eine Primzahl und $\overline{\mathbb{F}}_p$ ein algebraischer Abschluss des endlichen Körpers $\mathbb{F}_p$ mit p Elementen. Für $r \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{F}_{p^r} \subset \overline{\mathbb{F}}_p$ den Zwischenkörper mit p^r Elementen. Zeigen Sie:

1. Ist $n \in \mathbb{N}$ und A eine $n \times n$-Matrix mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$, so dass das charakteristische Polynom von A irreduzibel über $\mathbb{F}_p$ ist, so ist A über dem Körper $\mathbb{F}_{p^n}$ diagonalisierbar.
2. Für $p = 5$ ist die 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nicht über $\mathbb{F}_{125}$ diagonalisierbar, aber über $\mathbb{F}_{25}$.

(12 Punkte)