Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Die Menge

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}_p, a \neq 0 \right\}$$

ist eine Untergruppe der $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{F}_p)$ (Nachweis nicht erforderlich). Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.

b) Sei nun G eine beliebige Gruppe der Ordnung $p(p-1)$. Zeigen Sie, dass es genau eine Untergruppe H von G der Ordnung p gibt. Zeigen Sie weiter, dass G genau dann auflösbar ist, wenn G/H auflösbar ist.

c) Sei $C := (\mathbb{Z}/61\mathbb{Z}) \times A_5$ das direkte Produkt der zyklischen Gruppe der Ordnung 61 und der alternierenden Gruppe A_5. Ist C auflösbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(14 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei

$$R := \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, \quad i^2 = -1,$$

der Ring der ganzen Gaußschen Zahlen. Sei

$$I := \mathbb{Z} \cdot 25 + \mathbb{Z}(7+i) = \{25x + y(7+i) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Die Menge I ist ein Ideal in R (Nachweis nicht erforderlich).

a) Zeigen Sie, dass $\varphi\colon \mathbb{Z} \to R/I, a \mapsto a + I$, surjektiv ist und bestimmen Sie den Kern von φ.

b) Zeigen sie, dass die Gruppe $(R/I)^\times$ der Einheiten von R/I zyklisch von der Ordnung 20 ist.

c) Wie viele verschiedene Erzeuger von $(R/I)^\times$ gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

(12 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Sei

$$f(x) := x^4 - 6x^2 - 14 \in \mathbb{Q}[x].$$

a) Zeigen Sie, dass $K := \mathbb{Q}(\sqrt{3 + \sqrt{23}}, \sqrt{-14})$ der Zerfällungskörper von f ist.

b) Zeigen Sie: $[K : \mathbb{Q}] = 8$.

(12 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei

$$f(x) := x^3 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$$

und $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f. Sei $b := 2a^2 - a - 2$.

a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $b \neq 0$ gilt.

c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von a^2 über $\mathbb{Q}$.

(12 Punkte)

Aufgabe 5:

Es sei $M_4(\mathbb{Q})$ der Ring der 4×4-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Q}$. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q}).$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(x)$ sowie die Eigenwerte von A. Ist A diagonalisierbar?

b) Berechnen Sie das Ideal $J_A := \{g \in \mathbb{Q}[x] \mid g(A) = 0\}$.

(10 Punkte)