Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei $\mathbb{F}_2$ der endliche Körper mit genau zwei Elementen 0 und 1. Auf dem dreidimensionalen $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $(\mathbb{F}_2)^3$ betrachten wir den Endomorphismus

$$\phi : (\mathbb{F}_2)^3 \to (\mathbb{F}_2)^3, \qquad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, x_2, x_1).$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von ϕ. Bestimmen Sie alle Eigenwerte von ϕ in $\mathbb{F}_2$. Bestimmen Sie für jeden Eigenwert von ϕ in $\mathbb{F}_2$ eine Basis des zugehörigen Eigenraums.

(8 Punkte)

b) Gibt es eine Basis von $(\mathbb{F}_2)^3$, bezüglich derer ϕ eine Jordan'sche Normalform hat? Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn ja, bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform von ϕ.

(8 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $m \geq 3$ eine ungerade ganze Zahl. Zeigen Sie die folgende Kongruenz:

$$1^m + 2^m + 3^m + \ldots + (m-3)^m + (m-2)^m + (m-1)^m \equiv 0 \pmod{m}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei G eine Gruppe der Ordnung 105. Zeigen Sie:

a) G hat einen Normalteiler N mit $\#N = 5$ oder $\#N = 7$. (6 Punkte)

b) G ist auflösbar. (6 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei J das von $X^3 - 7$ erzeugte Ideal in $\mathbb{Q}[X]$.

a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}[X]/J$ ein Körper ist, und bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q}[X]/J \supset \mathbb{Q}$. (6 Punkte)

b) Bestimmen Sie ein Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$, für das $P + J$ multiplikatives Inverses von $(X^2+1)+J$ in $\mathbb{Q}[X]/J$ ist. (6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad $n \geq 1$. Sei K ein Zerfällungskörper von f. Sei $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ die zugehörige Galoisgruppe.

a) Beweisen Sie: Falls G eine abelsche Gruppe ist, hat sie die Ordnung n. (8 Punkte)

b) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$, wobei $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$ ist. Bestimmen Sie ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$, dessen Zerfällungskörper K ist. Beweisen Sie, dass $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ abelsch, aber nicht zyklisch ist. (8 Punkte)