Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Es seien die Polynome $p(X) = X^{500} - 2X^{301} + 1$ und $q(X) = X^2 - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ gegeben. Berechnen Sie den Rest der Division von $p(X)$ durch $q(X)$. (8 Punkte)

Aufgabe 2:
In einem kommutativen Ring R sei $r \in R$ die Summe zweier Quadrate, also $r = a^2 + b^2$ für geeignete $a, b \in R$. Zeigen Sie, dass dann auch $2r$ eine Summe zweier Quadrate ist.

(8 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei G eine Gruppe. Für $h \in G$ definieren wir den Gruppenautomorphismus

$$\phi_h \colon G \longrightarrow G, \quad g \longmapsto hgh^{-1}.$$

Die Automorphismen ϕ_h mit $h \in G$ nennt man *innere Automorphismen* von G. Wir definieren

$$\mathrm{Inn}(G) = \{\phi_h \mid h \in G\} \subseteq \mathrm{Aut}(G)$$

und das Zentrum von G,

$$Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx \text{ für alle } y \in G\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Inn}(G)$ ein Normalteiler in $\mathrm{Aut}(G)$ ist. (4 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi \colon G \longrightarrow \mathrm{Inn}(G), \quad h \longmapsto \phi_h$$

einen Gruppenisomorphismus $G/Z(G) \to \mathrm{Inn}(G)$ induziert. (4 Punkte)

c) Beschreiben Sie alle Automorphismen der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ mit sieben Elementen und begründen Sie, weshalb in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ nur die Identität ein innerer Automorphismus ist.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ und sei K der Zerfällungskörper des Polynoms

$$P(X) = X^3 + aX + b \in \mathbb{Q}[X].$$

Wir nehmen an, dass $P(X)$ keine Nullstellen in $\mathbb{Q}$ hat. Zeigen Sie:

a) $P(X)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ und hat keine mehrfachen Nullstellen in K. (3 Punkte)

b) Die Galoisgruppe $G := \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ist eine Untergruppe von S_3. (3 Punkte)

c) G hat entweder 3 oder 6 Elemente. (3 Punkte)

d) Sei $\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)$, wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$ die Nullstellen von $P(X)$ sind. Dann gilt für $\sigma \in G$ stets $\sigma(\delta) = \delta$ oder $\sigma(\delta) = -\delta$. (3 Punkte)

e) Gilt $\sigma(\delta) = \delta$ für alle $\sigma \in G$, dann ist G zyklisch und hat Ordnung 3. Anderenfalls ist $G = S_3$. (4 Punkte)

Aufgabe 5:

Wir schreiben $C^\infty(\mathbb{R})$ für den Ring (unter punktweiser Addition und Multiplikation) und $\mathbb{R}$-Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen.

Eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ heiße *D-finit*, wenn der von f und allen Ableitungen $f', f'', f''', \ldots$ erzeugte $\mathbb{R}$-Untervektorraum $D(f)$ von $C^\infty(\mathbb{R})$ endlich-dimensional ist.

Zeigen Sie, dass die D-finiten Funktionen einen Unterring von $C^\infty(\mathbb{R})$ bilden. (14 Punkte)