Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Man konstruiere eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 2013.

Hinweis: Man verwende ein geeignetes semidirektes Produkt.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen, und seien $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$ Nullteiler im Restklassenring $R := \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

$$\xi\eta = 0 \iff \xi R + \eta R = R.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Beweisen Sie, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist.

Hinweis: Man betrachte eine durch Multiplikation gegebene Abbildung. (6 Punkte)

Aufgabe 4:

a) Sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit drei Elementen. Man bestimme alle normierten, irreduziblen Polynome mit Grad ≤ 2 in $\mathbb{F}_3[X]$.

b) Ist $X^4 + 9X^2 - 2X + 2$ in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel?

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\zeta_n := e^{2\pi i/n}$ und $k_n := \mathrm{kgV}\{1, \ldots, n\}$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $1, \ldots, n$. Zeigen Sie, für alle $n \in \mathbb{N}$, die folgenden Formeln über die Grade von Körpererweiterungen:

a) $[\mathbb{Q}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) : \mathbb{Q}] = \Phi(k_n)$, wobei Φ die Eulersche Φ-Funktion bezeichnet.

b) $[\mathbb{Q}(\sqrt[1]{2}, \ldots, \sqrt[n]{2}) : \mathbb{Q}] = k_n$. (6 Punkte)