Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei $S = \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{es gibt } x, y \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = x^2 - 23y^2\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Primzahl 97 ist kein Element von S.
Hinweis: Sie können zum Beispiel das Quadratische Reziprozitätsgesetz verwenden. (5 Punkte)

b) Sind $a, b \in S$, dann ist auch $ab \in S$. (5 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $f = X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Sei weiter $f_0 = X$ und für $n \geq 1$ sei $f_n = f_{n-1}(f) = f(f_{n-1})$ das n-fach iterierte Polynom f, also

$$f_1 = X^2 - 2, \quad f_2 = (X^2-2)^2 - 2, \quad f_3 = ((X^2-2)^2-2)^2 - 2 \quad \text{usw.}$$

Zeigen Sie:

a) Alle Polynome f_n sind irreduzibel. (5 Punkte)

b) Sei $z_n = e^{\pi i/2^{n+1}}$ eine primitive 2^{n+2}-te Einheitswurzel. Für k ungerade ist $2\cos\frac{k\pi}{2^{n+1}} = z_n^k + z_n^{-k}$ eine Nullstelle von f_n. (5 Punkte)

c) Die Galoisgruppe von f_2 über $\mathbb{Q}$ ist abelsch. (5 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $G = \mathrm{SL}\,(2, \mathbb{F}_7) = \{A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_7) \mid \det(A) = 1\}$ und $H = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a \in \mathbb{F}_7\right\}$.

a) Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe der Ordnung 7 von G ist. (3 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass $SL(2, \mathbb{F}_7)$ Ordnung 336 hat. (6 Punkte)

c) Wie viele Untergruppen der Ordnung 7 gibt es in G? (6 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $f \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass es höchstens $n-1$ komplexe Zahlen α gibt, für die $f(X) - \alpha$ eine mehrfache Nullstelle hat. (10 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Sei M die Menge der 3×3-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{C}$, deren charakteristisches Polynom $(X-1)^3$ ist.

a) Zeigen Sie: $GL(3,\mathbb{C})$ operiert durch Konjugation auf M: $P * A = PAP^{-1}$ für $P \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ und $A \in M$. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Bahnen dieser Operation. (6 Punkte)