Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
In der Gruppe $G := GL_4(\mathbb{C})$ betrachten wir die Teilmenge

$$M := \left\{ B \in GL_4(\mathbb{C}) \,\middle|\, B^2 = E_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass alle Matrizen $B \in M$ diagonalisierbar sind.

b) Zeigen Sie, dass die Operation $G \times M \to M$, $(A, B) \mapsto ABA^{-1}$ von G auf M durch Konjugation wohldefiniert ist und die Menge M in genau 5 disjunkte Bahnen zerlegt.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $p \neq 2$ eine Primzahl, $\zeta := \exp(2\pi i/p) \in \mathbb{C}$ und $\sqrt[p]{p} \in \mathbb{R}_{>0}$. Weiter sei L der Zerfällungskörper des Polynoms $f(X) = X^p - p$ in $\mathbb{C}$ und M der Zerfällungskörper des Polynoms $g(X) = X^{p^2} - 1$ in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) $L = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[p]{p})$.

b) $[L : \mathbb{Q}] = [M : \mathbb{Q}]$.

c) Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ ist nicht abelsch.

d) Die Körper L und M sind nicht isomorph.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:
Für welche $a, b \in \mathbb{Q}$ ist das Polynom $(X-1)^2$ ein Teiler von $f(X) := aX^{30} + bX^{15} + 1$?

(6 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei R ein Integritätsring. Zeigen Sie: Ist $R[X]$ ein Hauptidealring, so ist R ein Körper.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:
Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung, $G := \mathrm{Gal}(L/K)$ die zugehörige Galoisgruppe, $\alpha \in L$ und $f(X)$ das normierte Minimalpolynom von α über K. Zeigen Sie, dass

$$f(X)^{[L:K(\alpha)]} = \prod_{\sigma \in G} \big(X - \sigma(\alpha)\big)$$

gilt.

(6 Punkte)