Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungen des folgenden Systems:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 2 \\ x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 3 \pmod 5 \end{aligned}$$

(5 Punkte)

Aufgabe 2:

a) Sei $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$. Zeigen Sie: Ist $\frac{p}{q}$ eine rationale Nullstelle von P, und sind p und q teilerfremde ganze Zahlen, dann gilt $q|a_n$ und $p|a_0$.

b) Bestimmen Sie die rationalen Nullstellen und deren Multiplizitäten von

$$P = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 4X + 2$$

und zerlegen Sie P in irreduzible reelle Polynome.

c) Sei $Q_a = X^3 + 2X + a$. Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, so dass P und Q_a teilerfremd in $\mathbb{R}[X]$ sind.

(9 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $V := \mathbb{F}_2^2$ der zweidimensionale Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen. Sei

$$G := \{v \mapsto Av + b \mid A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2), b \in V\}$$

die Gruppe der affinen Abbildungen von V.

a) Geben Sie alle Matrizen in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ an.

b) Zeigen Sie die folgenden Isomorphismen: $G \cong S_4$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$. (Hierbei bedeutet S_m die symmetrische Gruppe vom Grad m.)

(8 Punkte)

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie zwei irreduzible Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[x]$, so dass die Galoisgruppen $\mathrm{Gal}(f)$ und $\mathrm{Gal}(g)$ gleich viele Elemente haben, aber nicht isomorph sind. (8 Punkte)