Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$. Geben Sie eine Basis von K über $\mathbb{Q}$ an und die Darstellungsmatrix des Endomorphismus

$$K \to K, \quad x \mapsto \sqrt[3]{5} \cdot x$$

bezüglich dieser Basis. Begründen Sie, warum diese Matrix über $\mathbb{Q}$ nicht diagonalisierbar ist.
(5 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei G eine endliche Gruppe. Die Ordnung von $g \in G$ bezeichnen wir mit $\operatorname{ord}(g)$. Es seien $a, b, c \in G$ mit folgenden Eigenschaften: Die Gruppe G wird von $\{a, b, c\}$ erzeugt, das Element a erzeugt das Zentrum von G, und es gilt

$$bcb^{-1}c^{-1} = a.$$

a) Berechnen Sie $b^n c b^{-n} c^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{ord}(a) \mid \operatorname{ord}(b)$.

c) Zeigen Sie, dass $b^{\operatorname{ord}(a)}$ im Zentrum von G liegt.

d) Folgern Sie hieraus $\operatorname{ord}(b) \mid (\operatorname{ord}(a))^2$.

(Hinweis: Das Zentrum einer Gruppe G ist die Menge aller $x \in G$ mit $xg = gx$ für alle $g \in G$.)
(8 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei p eine ungerade Primzahl. Zeigen Sie, dass

$$2^2 \cdot 4^2 \cdots (p-3)^2 \cdot (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p+1)} \pmod{p}.$$

(Ohne Beweis darf der Wilson'sche Satz verwendet werden: Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ ist genau dann eine Primzahl, wenn $(n-1)! + 1$ durch n teilbar ist.)
(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei E/K eine Körpererweiterung mit $[E : K] = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Sei $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grade 3, welches in E eine Nullstelle besitzt. Zeigen Sie, dass f in K eine Nullstelle besitzt.
(5 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen. Weiter sei $f := X^q - X - a \in K[X]$ für ein $a \in K$. Sei L ein Zerfällungskörper von f über K. Sei $\alpha \in L$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass die Menge der Nullstellen von f durch $\{\alpha + \beta \mid \beta \in K\}$ gegeben ist und dass $K(\alpha)$ galoissch über K ist. (6 Punkte)