Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Berechnen Sie alle rationalen Nullstellen der reellen Funktion

$$f(x) = x^5 + x^4 - 2.$$

Begründen Sie insbesondere, dass es über die von Ihnen angegebenen Nullstellen hinaus keine weiteren rationalen Nullstellen gibt. (5 Punkte)

Aufgabe 2:
R sei ein endlicher kommutativer Ring mit Einselement. Zeigen Sie, dass jedes Element aus R entweder Einheit oder Nullteiler ist. (5 Punkte)

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n derart, dass die symmetrische Gruppe S_n eine Untergruppe mit Index 3 besitzt.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Es sei p eine Primzahl, G eine endliche p-Gruppe und N ein Normalteiler in G der Ordnung p. Zeigen Sie, dass N im Zentrum von G liegt. (5 Punkte)

Aufgabe 5:
Das Polynom

$$f = X^4 - 2aX^2 + b \in \mathbb{Q}[X]$$

sei irreduzibel, und L bezeichne seinen Zerfällungskörper in $\mathbb{C}$. Ferner sei

$$K := \mathbb{Q}(\sqrt{a^2 - b}).$$

Beweisen Sie:

a) Ist $[L : \mathbb{Q}] = 4$, so ist $\sqrt{b} \in K$.

b) Ist $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, so ist $Gal(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

c) Ist $\sqrt{b} \in K \backslash \mathbb{Q}$, so ist $Gal(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_4$.

d) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ist ein primitives Element der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$.

e) Welche Struktur hat die Galoisgruppe $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q})$?

(10 Punkte)