Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei G eine endliche einfache Gruppe und H eine echte Untergruppe vom Index $k > 2$ in G. Zeigen Sie, dass die Gruppenordnung $|G|$ von G ein Teiler von $k!/2$ ist. (6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei L/K die quadratische Körpererweiterung mit $L = K[X]/(X^2 - a)$ mit $a \in K^* \setminus K^{*^2}$, d.h. $a \neq b^2$ für alle $b \in K^*$. Geben Sie alle normierten quadratischen Polynome $f(X) \in K[X]$ an, so dass es einen Körperisomorphismus $K[X]/(f(X)) \xrightarrow{\sim} L$ über K gibt. (6 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit 2 Elementen und sei $K = \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$.

a) Zeigen Sie, dass K ein Körper ist.

b) Sei $f(X) \in \mathbb{F}_2[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad ≤ 5. Gelte $f(0) \neq 0, f(1) \neq 0$ und $f(a) \neq 0$, wobei $a \in K$ eine Nullstelle von $X^2 + X + 1$ ist. Zeigen Sie, dass $f(X)$ irreduzibel ist.

c) Zeigen Sie, dass $X^5 + 5X^4 + 3X^3 + X + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist. (6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $\zeta = \zeta_{11} \in \mathbb{C}$ eine primitive 11–te Einheitswurzel. Dann ist $\mathbb{Q}(\zeta)$ über $\mathbb{Q}$ galoissch mit Galoisgruppe $(\mathbb{Z}/11\,\mathbb{Z})^* \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$.

a) Geben Sie $\tau, \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ an, mit $|\langle\tau\rangle| = 2$ und $|\langle\sigma\rangle| = 5$.

b) Geben Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\zeta)$ an, mit $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 5$ und $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 2$.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei D_6 die Diedergruppe der Ordnung 12, sei A_4 die alternierende Gruppe und sei G die von a und b erzeugte Gruppe, wobei a die Ordnung 3 und b die Ordnung 4 hat und $bab^{-1} = a^2$ gilt. Zeigen Sie, dass diese 3 Gruppen paarweise nicht isomorph sind. (6 Punkte)