

Thema Nr. 1  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Die höchste erreichbare Punktzahl für diese Aufabengruppe beträgt 30 Punkte.

**Aufgabe 1:**

Sei  $A$  eine endliche abelsche Gruppe. Sei weiter  $B \subseteq A$  eine Untergruppe mit  $B \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und  $A/B \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ .

- a) Bestimmen Sie die Ordnung von  $A$ .
- b) Zeigen Sie, dass  $A$  höchstens 4 Elemente der Ordnung  $\leq 2$  hat.
- c) Zeigen Sie, dass  $A$  entweder zyklisch ist oder  $A \cong A_1 \times A_2$  mit  $A_1, A_2$  zyklisch.
- d) Bestimmen Sie nun alle Möglichkeiten für  $A$ .

(8 Punkte)

**Aufgabe 2:**

Für ein Element  $g$  einer Gruppe  $G$  sei  $\iota_g \in \text{Aut}(G)$  der zugehörige innere Automorphismus:  $\iota_g(h) = ghg^{-1}$ . Die Gruppe  $G$  heiÙe vollständig, wenn die Abbildung  $G \rightarrow \text{Aut}(G) : g \mapsto \iota_g$  bijektiv ist.

- a) Zeigen Sie, dass  $G$  genau dann vollständig ist, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:
  - i) Das Zentrum von  $G$  ist trivial.
  - ii) Jeder Automorphismus von  $G$  ist ein innerer.
- b) Sei  $G$  eine Gruppe und  $N \subseteq G$  ein Normalteiler. Angenommen  $N$  ist vollständig. Zeigen Sie, dass  $N$  ein direkter Faktor von  $G$  ist.

(9 Punkte)

**Aufgabe 3:**

Für den Ring  $A = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  betrachten wir Einheiten im Polynomring  $A[t]$ .

- a) Zeigen Sie, dass  $p(t) = 1 + 5t$  keine Einheit in  $A[t]$  ist.
- b) Zeigen Sie, dass  $q(t) = 1 + 6t$  eine Einheit in  $A[t]$  ist.

(7 Punkte)

**Aufgabe 4:**

Man gebe ein normiertes, quadratisches und irreduzibles Polynom  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$  an, so dass  $f(x+d)$  für keine Wahl von  $d \in \mathbb{Z}$  ein Eisensteinpolynom ist.

(6 Punkte)