

Thema Nr. 3  
 (Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**

Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $H \subset G$  eine Untergruppe. Sei  $x \in X := G/H$  und sei  $\emptyset \neq U \subset X$  eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Anzahl

$$|\{g \in G \mid gU \ni x\}|$$

unabhängig von  $x$  ist.

(6 Punkte)

**Aufgabe 2:**

Ist  $G$  eine abelsche Gruppe, dann sei  $\text{tor}(G) := \{g \in G \mid \text{es gibt ein } 1 \leq n \in \mathbb{N} \text{ mit } ng = 0\}$ . Zeigen Sie:

a)  $\text{tor}(G)$  ist eine Untergruppe von  $G$  und  $\text{tor}(G/\text{tor}(G)) = \{0\}$ .

b) Ist  $G = G_1 \times \cdots \times G_r$  ein Produkt von abelschen Gruppen  $G_i$  ( $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq r$ ), so gilt  $\text{tor}(G) = \text{tor}(G_1) \times \cdots \times \text{tor}(G_r)$ .

(6 Punkte)

**Aufgabe 3:**

Sei  $K$  ein Körper und  $K_f$  ein Zerfällungskörper eines Polynoms  $f(X) = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n) \in K[X]$  mit  $\alpha_i \in K_f$ . Sei  $E_k = K(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ,  $k \leq n$ . Zeigen Sie, dass  $[E_k : K] \leq \frac{n!}{(n-k)!}$ .

(6 Punkte)

**Aufgabe 4:**

Sei  $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$  und  $i\sqrt{5} \in \mathbb{C}$ ,  $i^2 = -1$  und  $L := \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ,  $K := \mathbb{Q}(i\sqrt{5})$ . Sei  $E = L \cdot K$  das Kompositum von  $L$  und  $K$  in  $\mathbb{C}$ .

a) Zeigen Sie, dass  $E/\mathbb{Q}$  galoissch ist und bestimmen Sie den Isomorphietyp der Galoisgruppe  $G$  von  $E$  über  $\mathbb{Q}$ .

b) Bestimmen Sie alle Untergruppen  $U$  von  $G$ .

c) Ist  $U$  eine Untergruppe von  $G$  so sei  $E^U$  der zugehörige Fixkörper. Finden Sie für jedes  $U \subset G$  ein  $\beta \in \mathbb{C}$  mit  $E^U = \mathbb{Q}(\beta)$ .

(6 Punkte)