

Thema Nr. 3
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei G eine endliche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Sei $x \in X := G/H$ und sei $\emptyset \neq U \subset X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Anzahl

$$|\{g \in G \mid gU \ni x\}|$$

unabhängig von x ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Ist G eine abelsche Gruppe, dann sei $\text{tor}(G) := \{g \in G \mid \text{es gibt ein } 1 \leq n \in \mathbb{N} \text{ mit } ng = 0\}$. Zeigen Sie:

- a) $\text{tor}(G)$ ist eine Untergruppe von G und $\text{tor}(G/\text{tor}(G)) = \{0\}$.
- b) Ist $G = G_1 \times \cdots \times G_r$ ein Produkt von abelschen Gruppen G_i ($i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq r$), so gilt $\text{tor}(G) = \text{tor}(G_1) \times \cdots \times \text{tor}(G_r)$.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei K ein Körper und K_f ein Zerfällungskörper eines Polynoms $f(X) = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n) \in K[X]$ mit $\alpha_i \in K_f$. Sei $E_k = K(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $k \leq n$. Zeigen Sie, dass $[E_k : K] \leq \frac{n!}{(n-k)!}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ und $i\sqrt{5} \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$ und $L := \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $K := \mathbb{Q}(i\sqrt{5})$. Sei $E = L \cdot K$ das Kompositum von L und K in \mathbb{C} .

- a) Zeigen Sie, dass E/\mathbb{Q} galoissch ist und bestimmen Sie den Isomorphietyp der Galoisgruppe G von E über \mathbb{Q} .
- b) Bestimmen Sie alle Untergruppen U von G .
- c) Ist U eine Untergruppe von G so sei E^U der zugehörige Fixkörper. Finden Sie für jedes $U \subset G$ ein $\beta \in \mathbb{C}$ mit $E^U = \mathbb{Q}(\beta)$.

(6 Punkte)