Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei Sym_n die Gruppe der Permuationen der Menge $M = \{1, 2, \ldots, n\}$. Die Untergruppe G von Sym_n lasse eine Teilmenge $A \subset M$ der Mächtigkeit k mit $1 \leq k \leq n-1$ invariant. Zeigen Sie: $[\mathrm{Sym}_n : G] \geq \binom{n}{k}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen, und $V = \mathbb{F}_2^n$ für eine natürliche Zahl $n \geq 1$. Für jedes Polynom $f(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in \mathbb{F}_2[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ sei $\overline{f}$ die Abbildung $V \to \mathbb{F}_2$, die $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V$ auf $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ abbildet.

a) Für $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V$ setze $f_v := \prod_{i=1}^{n}(X_i + a_i + 1)$. Zeigen Sie: $\overline{f}_v(v) = 1$, und $\overline{f}_v(w) = 0$ für alle $v \neq w \in V$.

b) Zeigen Sie: Zu jeder Abbildung $\phi : V \to \mathbb{F}_2$ gibt es ein Polynom $f \in \mathbb{F}_2[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ mit $\phi = \overline{f}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie die Automorphismengruppe der additiven Gruppe des Körpers der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

b) Geben Sie einen Körper K an, für den die Automorphismengruppe seiner additiven Gruppe nicht kommutativ ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $a \in \mathbb{Z}$ beliebig. Zeigen Sie: Es gibt unendlich viele ganze $b \in \mathbb{Z}$, so dass das Polynom $f(X) = X^3 + aX + b \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

(6 Punkte)