Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung:
Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

Sei $K = \{0,1\}$ der Körper mit zwei Elementen, und E sei ein Erweiterungskörper von K mit $|E| = 2^8$ Elementen.
Wie viele über K primitive Elemente besitzt E? (Das sind Elemente $\alpha \in E$ mit $E = K(\alpha)$.)
Begründen Sie Ihre Antwort. (6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei K wie in Aufgabe 1 und es sei $f = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 \in K[X]$.

a) Beweisen Sie, dass f irreduzibel in $K[X]$ ist.

b) Sei (f) das von f erzeugte Ideal in $K[X]$. Es sei E der Erweiterungskörper $E := K[X]/(f)$ von K und es sei x das Element $x := X + (f) \in E$
Bestimmen Sie die Ordnung von x in der multiplikativen Gruppe E^* von E. (6 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei $G{=}{<}z{>}$ eine multiplikativ geschriebene zyklische Gruppe der Ordnung 63 (mit z als einem erzeugenden Element).

a) Bestimmen Sie (explizit) zwei nicht triviale Untergruppen G_1 und G_2 von G, so dass G das direkte Produkt von G_1 und G_2 ist.

b) Bestimmen Sie die Ordnung des Elementes $z^{49} \in G$. (6 Punkte)

Aufgabe 4:

Seien G und z wie in der Aufgabe 3.

a) Bestimmen Sie einen endlichen sowie einen unendlichen Körper K, dessen multiplikative Gruppe K^* eine zu G isomorphe Untergruppe enthält.

b) Sei K ein Körper und G eine Untergruppe von K^*. Zeigen Sie, dass $\sum_{i=0}^{62} z^i = 0$. (6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Gegeben sei das Polynom $f := X^4 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Beweisen Sie: $L := \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)$ ist Zerfällungskörper von f.

b) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$.

c) Beweisen Sie: $a := \sqrt[4]{3} + i$ ist ein primitives Element von L über $\mathbb{Q}$.

(6 Punkte)