Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung:
Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:
Betrachten Sie die folgenden vier nicht abelschen Gruppen der Ordnung 24:

$$S_4, D_{12}, D_6 \times \mathbb{Z}_2, S_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Dabei ist S_n die symmetrische Gruppe auf n Elementen, D_n die Diedergruppe mit $2n$ Elementen und $\mathbb{Z}_2$ die zyklische Gruppe der Ordnung 2.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Ordnung 2 in allen vier Gruppen.

b) Bestimmen Sie (mit Begründung), welche der vier Gruppen zueinander isomorph sind (und welche nicht).

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Es wird der Unterring $R := \mathbb{Z}\left[i\sqrt{2}\right] = \left\{a + ib\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ von $\mathbb{C}$ betrachtet.
Mit $\varphi : R \to \mathbb{N}_0, a + ib\sqrt{2} \longmapsto a^2 + 2b^2$ als euklidischer Funktion ist R ein euklidischer Ring (darf benutzt werden).

a) Welche der Zahlen 2, 3, 5, 7, 11 sind Primelemente in R?

b) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von 6 und $4 + i\sqrt{2}$ in R.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $R[X]$ der Polynomring über einem faktoriellen Ring R. Beweisen Sie das sogenannte Gauß'sche Lemma:
Seien $0 \neq f, g \in R[X]$. Sind f und g primitiv, so auch ihr Produkt fg.
(Ein Polynom $f \neq 0$ heißt primitiv, wenn seine Koeffizienten teilerfremd sind.) (6 Punkte)

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie eine $\mathbb{Q}$-Basis des Erweiterungskörpers $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ von $\mathbb{Q}$ und stellen Sie x^{-1} für $x = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$ als Linearkombination dieser Basis dar. (6 Punkte)

Aufgabe 5:
Wie viele Zwischenkörper hat der Zerfällungskörper von $f = X^3 - 3X^2 + 5$ über $\mathbb{Q}$?
Was sind die Grade dieser Körper über $\mathbb{Q}$ und welche dieser Körper sind galoissch über $\mathbb{Q}$ (Antworten mit Begründung). (6 Punkte)