

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

Beweisen Sie:

Es sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe und U, V seien Untergruppen von G . Dann gilt $G = U \oplus V$ (d. h. G ist die direkte Summe von U und V) genau dann, wenn je zwei Nebenklassen $U + a$ und $V + b$ mit $(a, b \in G)$ genau ein Element gemeinsam haben. (5 Punkte)

Aufgabe 2:

Für welche Primzahlen $p = 10n + k$ ($n \geq 0, k \in \{1, 3, 7, 9\}$) ist 5 ein quadratischer Rest und für welche ein quadratischer Nichtrest? (5 Punkte)

Aufgabe 3:

Zeigen Sie:

- a) Die additive Gruppe der reellen Zahlen ist isomorph zur multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen.
- b) Die additive Gruppe eines Körpers ist nie isomorph zur multiplikativen Gruppe dieses Körpers. (5 Punkte)

Aufgabe 4:

Es sei L eine Galoiserweiterung eines Körpers K , so dass die Galoisgruppe von L über K die symmetrische Gruppe S_n mit $n \geq 5$ ist. Wie viele Zwischenkörper F mit $K < F < L$ existieren, so dass F eine Galoiserweiterung von K ist? Was ist die Galoisgruppe von F über K und die von L über F ? (5 Punkte)

Aufgabe 5:

Beweisen Sie:

- a) Eine Gruppe, in der jedes Element die Ordnung 2 hat, ist abelsch.
- b) Hat eine nichtabelsche Gruppe G der Ordnung 8 zwei verschiedene Elemente der Ordnung zwei, so ist sie isomorph zur Symmetriegruppe eines Quadrates (ist also insbesondere eine Diedergruppe). (5 Punkte)

Aufgabe 6:

Es sei R ein kommutativer Ring mit 1. Es sei M ein maximales Ideal von R .

- a) Sei $1 + a$ invertierbar für jedes Element $a \in M$. Zeigen Sie, dass M das einzige maximale Ideal von R ist.
- b) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ der Faktorring R/M^n nur ein einziges maximales Ideal hat. (5 Punkte)