

Thema Nr. 3**(Aufgabengruppe)**

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: Auf die einzelnen Aufgaben wird jeweils maximal die in Klammern angegebene Punktzahl vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Zeigen Sie: Jede endliche Körpererweiterung L über K ist algebraisch.

Aufgabe 2 (6 Punkte):

- a) Geben Sie eine Gruppe mit genau 16 Untergruppen an.
- b) Geben Sie einen Körper mit genau 16 Teilkörpern an.

Aufgabe 3 (7 Punkte):

Geben Sie explizit einen Ring-Isomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Z}/1000\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/125\mathbb{Z}$$

und seine Umkehrung φ^{-1} an.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Hat die Gleichung

$$x^2 + 91y = 5$$

eine ganzzahlige Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (8 Punkte):

Sei $f = X^n - a$ ein über \mathbb{Q} irreduzibles Polynom mit abelscher Galoisgruppe $\text{Gal}(f|\mathbb{Q})$.

Zeigen Sie, dass n eine Potenz von 2 ist.

[Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\text{Gal}(f|\mathbb{Q})$ nichtabelsch ist, wenn n eine ungerade Primzahl ist.]