Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf die einzelnen Aufgaben wird jeweils maximal die in Klammern angegebene Punktzahl vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.*

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Beweisen Sie den Satz von Lagrange: Ist G eine endliche Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe, so ist $|H|$ ein Teiler von $|G|$.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

a) Zeigen Sie, dass eine nichtabelsche einfache Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_6 bereits in der alternierenden Gruppe A_6 liegt.

b) Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 120 gibt.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Seien R und S Ringe (mit 1). Zeigen Sie, dass die (zweiseitigen) Ideale des direkten Produktes $R \times S$ die Form $I \times J$ haben mit Idealen I bzw. J von R bzw. S.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Es seien p und q Primzahlen. Bestimmen Sie die Anzahl der irreduziblen normierten Polynome vom Grad q über dem Körper $\mathbb{F}_p$.

Aufgabe 5 (7 Punkte):

Beweisen Sie mit Mitteln der Algebra, dass das regelmäßige Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, das regelmäßige Siebeneck aber nicht.