Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf die einzelnen Aufgaben wird jeweils maximal die in Klammern angegebene Punktzahl vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.*

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Beweisen oder widerlegen Sie: Eine natürliche Zahl der Gestalt $4n+3$ mit $n \in \mathbb{N}$ besitzt keine Darstellung als Summe von zwei Quadraten ganzer Zahlen.

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Sei R ein Integritätsring. Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ in R definiert man

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} :\Leftrightarrow \quad \text{Es gibt } \alpha, \beta \in R \setminus \{0\} \text{ mit } \alpha \cdot \mathfrak{a} = \beta \cdot \mathfrak{b}.$$

Zeigen Sie:

a) Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, und es gilt
$$\mathfrak{a}_1 \sim \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_2 \sim \mathfrak{b}_2 \Rightarrow \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \sim \mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2$$

b) Genau dann gilt $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ als R-Moduln isomorph sind.

Aufgabe 3 (6 Punkte):

Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von $26+13i$ und $14-5i$ im Ring $\mathbb{Z}[i]$ der Gaußschen ganzen Zahlen.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Untersuchen Sie (mit Beweis) auf Irreduzibilität:

a) $f(X) = X^4 - X^3 - 9X^2 + 4X + 2$ und
$g(X) = X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$.

b) $f(X,Y) = Y^6 + XY^5 + 2XY^3 + 2X^2Y^2 - X^3Y + X^2 + X$ in $\mathbb{Q}[X,Y]$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5 (9 Punkte):

Sei k ein Körper mit $\operatorname{char} k \neq 2$, sei $f \in k[X]$ ein Polynom vom Grade $n \geq 2$, sei K ein Zerfällungskörper von f über k, und f habe n verschiedene Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ in K.
Das Element $\Delta \in K$ sei definiert durch

$$\Delta := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(\alpha_j - \alpha_i\right).$$

Dann heißt $D := \Delta^2$ die Diskriminante von f.

a) Zeigen Sie: K ist galoissch über k und es ist $D \in k$.

b) Sei $G := \operatorname{Gal}(K|k)$ die Galoisgruppe von K über k. Zeigen Sie:

$$\Delta \in k \Leftrightarrow \text{Jedes } \sigma \in G \text{ definiert eine gerade Permutation der } \alpha_1, \dots, \alpha_n.$$

c) Sei $f := X^4 + 2aX^2 + b \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel. Bestimmen Sie die Diskriminante von f und zeigen Sie:

$$\sqrt{b} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$