Thema Nr. 3

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 24 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.*

Aufgabe 1:

a) Sei $K = \mathbb{F}_2$ der Körper mit 2 Elementen. Finden Sie ein Polynom $f \in K[x]$, das die Kongruenz

$$\left(x^4 + x^3 + x^2 + 1\right) \cdot f \equiv x^2 + 1 \mod\left(x^3 + 1\right)$$

in $K[x]$ erfüllt.

b) Sei $K = \mathbb{F}_3$ der Körper mit 3 Elementen. Gibt es dann zu jedem $g \in K[x]$ ein $f \in K[x]$, so dass die Kongruenz

$$\left(x^2 + 1\right) \cdot f \equiv g \mod\left(x^3 + 1\right) \qquad (*)$$

erfüllt ist?

c) Finden Sie in der Kongruenz $(*)$ für $g = 1$ eine Lösung $f \in \mathbb{F}_3[x]$.

Aufgabe 2:

Sei $K = \mathbb{F}_2$ und $f = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in K[x]$. Bestimmen Sie die Galoisgruppe von f über K.

Aufgabe 3:

Die Diedergruppe D_6, also die Symmetriegruppe des regulären Sechsecks, und die alternierende Gruppe A_4 haben beide 12 Elemente.

a) Zeigen Sie, dass die Gruppen D_6 und A_4 nicht isomorph sind.

b) Geben Sie eine weitere nichtabelsche Gruppe der Ordnung 12 an, die zu den beiden genannten Gruppen nicht isomorph ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Für ein reelles Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ bezeichne f' die Ableitung. Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ verschiedene reelle Zahlen, und sei I die Menge aller Polynome $f \in \mathbb{R}[x]$ mit

$$f(a_i) = f'(a_i) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie:

a) I ist ein Ideal im Polynomring $\mathbb{R}[x]$.

b) I wird erzeugt von dem Polynom $\prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^2$.

c) Wie viele Ideale besitzt der Faktorring $\mathbb{R}[x]/I$?