Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 24 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.*

Aufgabe 1:

Geben Sie eine Untergruppe der Ordnung 21 in der symmetrischen Gruppe S_7 an.

Aufgabe 2:

Der Ring $R = \left\{n + m\sqrt{-2};\ n, m \in \mathbb{Z}\right\}$ ist bekanntlich ein euklidischer Ring bezüglich der Norm $\mathrm{N}\left(n + m\sqrt{-2}\right) = n^2 + 2m^2$.

a) Zeigen Sie, dass 11 ein zerlegbares und 13 ein unzerlegbares Element in R ist.
b) Zeigen Sie, dass der Restklassenring $R/13R$ ein Körper ist. Aus wie viel Elementen besteht er?
c) Verwenden Sie den Chinesischen Restsatz, um den Restklassenring $R/11R$ als direktes Produkt von zwei Körpern darzustellen.

Aufgabe 3:

a) Geben Sie die Anzahl und die Grade der normierten irreduziblen Teiler des Polynoms $X^{45} - 1$ im Polynomring $\mathbb{Z}[X]$ an. Wie lautet der irreduzible Teiler vom Grad 6 ?
b) Die Einheitswurzeln $\xi = e^{2\pi i/9}$ bzw. $\alpha = e^{2\pi i/3}$ erzeugen die Körper $K_9 = \mathbb{Q}(\xi)$ bzw. $K_3 = \mathbb{Q}(\alpha)$. Geben Sie die Bahn von ξ unter den Galoisgruppen $G = \mathrm{Gal}\left(K_9 \middle| \mathbb{Q}\right)$ bzw. $H = \mathrm{Gal}\left(K_9 \middle| K_3\right)$ an.
c) Geben Sie die Zerlegung des Polynoms $X^6 + X^3 + 1$ in irreduzible Faktoren im Polynomring $K_3[X]$ an.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Für Primzahlpotenzen q bezeichne $\mathbb{F}_q$ den Körper aus q Elementen.

a) Bestimmen sie die kleinste Zweierpotenz $q = 2^m$, so dass der Körper $\mathbb{F}_q$ eine primitive 17-te Einheitswurzel enthält.

b) Sei α ein erzeugendes Element der multiplikativen Gruppe des Körpers $\mathbb{F}_{256}$. Welchen Grad hat das Minimalpolynom f von α über $\mathbb{F}_2$? Welche Potenzen von α sind Nullstellen von f?

c) Sei α wie in b). Zeigen Sie unter Benutzung von Galois-Theorie, dass das Polynom

$$g = (X) = (X - \alpha)(X - \alpha^4)(X - \alpha^{16})(X - \alpha^{64})$$

Koeffizienten in $\mathbb{F}_4$ hat.