Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

(a) Begründen Sie, dass die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 8 & 3 & 9 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_9$$

in der alternierenden Gruppe A_9 liegt.

(b) Zeigen Sie, dass $\varphi(n)$ für $n \geq 3$ stets gerade ist – hierbei bezeichne φ die Eulersche φ-Funktion.

(c) Begründen Sie, dass in einem Integritätsbereich R aus $e^2 = e$, wobei $e \in R$, stets $e = 0$ oder $e = 1$ folgt.

(d) Bestimmen Sie den Körpergrad $[\mathbb{Q}(\sqrt[5]{7} \cdot e^{-2\pi i/5}) : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper und K^K die Menge aller Abbildungen $K \to K$. Es sei die Abbildung

$$\varphi\colon K[X] \to K^K, \quad f \mapsto \varphi(f)$$

betrachtet, wobei $\varphi(f)(x) := f(x)$ für alle $x \in K$. Beweisen Sie:

(a) Genau dann ist φ injektiv, wenn K unendlich ist.

(b) Genau dann ist φ surjektiv, wenn K endlich ist.

Aufgabe 3

Sei R ein (nicht notwendig kommutativer) Ring mit Eins. Ein Element $x \in R$ heißt *nilpotent*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$ gibt.

(a) Zeigen Sie: Ist der Ring R kommutativ, und ist $u \in R$ eine Einheit sowie $x \in R$ nilpotent, so ist $u+x$ eine Einheit.

(b) Es sei R der Ring der 2×2-Matrizen über $\mathbb{Q}$. Geben Sie mit Begründung ein Beispiel für eine Einheit $u \in R$ und ein nilpotentes Element $x \in R$ derart, dass $u+x$ keine Einheit ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe einer galoisschen Körpererweiterung L/K vom Grad 143 stets zyklisch ist.

(b) Sei L/K eine galoissche Körpererweiterung vom Grad 55 mit nichtabelscher Galoisgruppe. Zeigen Sie: Es gibt genau einen echten Zwischenkörper M von L/K, sodass M/K eine Galoiserweiterung ist. Berechnen Sie den Grad $[M : K]$.

Aufgabe 5

(a) Sei K ein Körper, $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und sei A eine beliebige $n \times n$-Matrix über K. Zeigen Sie: Es existiert eine endliche Körpererweiterung L/K derart, dass A einen Eigenwert $\lambda \in L$ besitzt.

(b) Begründen Sie, dass $L := \mathbb{Q}[T]/(T^3+T+1)$ ein Körper ist. Zeigen Sie, dass $\alpha := [T] \in L$ ein Eigenwert der linearen Abbildung

$$f\colon L^3 \to L^3, \quad f(u,v,w) := (-w, u-w, v)$$

ist, und geben Sie einen Eigenvektor zum Eigenwert α an.