Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass das Polynom $x^7 + 3x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist.

(b) Bestimmen Sie die Ordnung der Permutation $(12)(34)(567) \in S_7$.

(c) Sei G eine abelsche Gruppe und seien $a, b, c \in G$. Angenommen a hat Ordnung 2, b hat Ordnung 4 und c hat Ordnung 6. Bestimmen Sie die Ordnung von $abc \in G$.

(d) Bestimmen Sie alle Einheitswurzeln in dem Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Sei G eine Gruppe.

(a) Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeigen Sie, dass die Menge $\{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ endlich ist.

(b) Es seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und es seien $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen von G mit $[G : H_1] = n_1$ und $[G : H_2] = n_2$. (Für eine Untergruppe K von G bezeichnet $[G : K]$ den Index von G nach K.) Zeigen Sie, dass $[G : (H_1 \cap H_2)] \leq n_1 n_2$ ist.

(c) Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeigen Sie, dass ein Normalteiler $N \subseteq G$ von endlichem Index existiert, für den $N \subseteq H$ gilt.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Seien p eine Primzahl, $q = p^n$ $(n \geq 1)$ eine Primzahlpotenz und $\mathbb{F}_q$ der endliche Körper mit q Elementen.

(a) Zeigen Sie im Falle $p \neq 2$: $|\{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_q\}| = \frac{q+1}{2}$.

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{F}_q$ gegeben. Zeigen Sie, dass $x, y \in \mathbb{F}_q$ so existieren, dass $\alpha = x^2 + y^2$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie den Schnitt der Mengen $\{\alpha - x^2 \in \mathbb{F}_q \mid x \in \mathbb{F}_q\}$ und $\{y^2 \in \mathbb{F}_q \mid y \in \mathbb{F}_q\}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Seien $p > 0$ eine Primzahl, $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine Körpererweiterung vom Grad p, $\alpha \in K$ ein Element mit $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, $\alpha_1 := \alpha, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{C}$ die Konjugierten von α über $\mathbb{Q}$ und letztlich $E := \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ die normale Hülle von $K/\mathbb{Q}$.

(a) Zeigen Sie, z.B. durch Betrachten der Operation der Galoisgruppe auf den Nullstellen, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ eine zyklische Untergruppe der Ordnung p enthält.

(b) Zeigen Sie: Gilt $\alpha_2 \in K$, so folgt $K = E$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei $K = \{0, 1, a, b\}$ ein Körper mit vier Elementen (0 sei das Nullelement, 1 das Einselement).

(a) Stellen Sie die Additions- und die Multiplikationstabelle von K auf.

(b) Sei $f(X) = X^4 + X + 1 \in K[X]$. Zeigen Sie, dass f reduzibel ist.

(c) Bestimmen Sie den Grad des Zerfällungskörpers von f über K.