Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das (multiplikative) Inverse von $\overline{47}$ im Restklassenring $\mathbb{Z}/112\mathbb{Z}$.

(b) Bestimmen Sie eine Zerlegung des Polynoms $2X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 2X \in \mathbb{Z}[X]$ in irreduzible Faktoren aus $\mathbb{Z}[X]$.

(c) Geben Sie drei nichtisomorphe Gruppen der Ordnung 12 an (mit Begründung).

(d) Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 95 zyklisch ist.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Es seien X die Menge der diagonalisierbaren 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ und $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ die Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\cdot : G \times X \to X\ ,\ (B, M) \mapsto B\,M\,B^{-1}$$

eine Operation ist.

(b) Ist die Operation aus (a) transitiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Geben Sie ein Repräsentantensystem für die Bahnen der Operation aus (a) an.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Gegeben sind der Ring $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} \mid a,\, b \in \mathbb{Z}\}$ und die multiplikative Funktion $N : R \to \mathbb{N}_0$, $N(a + b\sqrt{-3}) = a^2 + 3\,b^2$. (Die Multiplikativität von N muss nicht gezeigt werden.)

(a) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $R^\times$ von R.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Element $a + b\sqrt{-3}$ mit $N(a + b\sqrt{-3}) = 4$ irreduzibel ist.

(c) Ist R ein faktorieller Ring? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Für ein Polynom $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ bezeichne $f'(X)$ die Ableitung und $\deg(f)$ den Grad von $f(X)$. Ferner sei $n_0(f) \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der verschiedenen Nullstellen von $f(X)$ in $\mathbb{C}$ (also ohne Vielfachheiten gezählt). Zeigen Sie, dass für jedes Polynom $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ mit $f(X) \neq 0$ die Gleichung

$$\deg(f) = \deg(\,\mathrm{ggT}(f, f')) + n_0(f)$$

gilt.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Es sei α die reelle Zahl $\alpha := \sqrt[3]{2+\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$, und es sei ζ die dritte Einheitswurzel $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom f von α über $\mathbb{Q}$.

(b) Es sei $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$ und $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \zeta)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass die reelle Zahl $\sqrt[3]{2}$ in L liegt, und folgern Sie, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ einen Normalteiler vom Index 6 besitzt.