Thema 2

Auch wenn es nicht in allen Aufgaben explizit gefordert wird, so sind alle Antworten zu begründen.

Aufgabe 1

Sei R ein Ring und eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ von Elementen von R rekursiv definiert wie folgt:

$$a_0 = a_1 = 1\,, \qquad a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n\,.$$

(a) Sei $\alpha \in R$ mit $\alpha^2 = 2$. Zeigen Sie, dass dann für alle $n \geq 0$ gilt

$$2a_n = (1+\alpha)^n + (1-\alpha)^n\,.$$

(b) Sei p eine ungerade Primzahl, sodass es ein $\alpha \in R = \mathbb{F}_p$ (der Körper mit p Elementen) gibt mit $\alpha^2 = 2$.

Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) periodisch ist mit einer minimalen Periode, die $p-1$ teilt.

(c) Bestimmen Sie die kleinste ganze Zahl $k > 0$, sodass für $R = \mathbb{F}_7$ gilt $a_{n+k} = a_n$ für alle $n \geq 0$.

(d) Zeigen Sie, dass es für $R = \mathbb{Z}$ keine ganzen Zahlen $m, n \geq 0$ mit der Eigenschaft $a_n = m^6 + 4$ gibt.

Aufgabe 2

(a) Bestimmen Sie die ganze Zahl $a \in \{0, \ldots, 82\}$ mit $50^{247} \equiv a \pmod{83}$.

(b) Der Satz von Wilson besagt, dass $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ für jede Primzahl p gilt. Bestimmen Sie hiermit die ganze Zahl $a \in \{0, \ldots, 100\}$ mit $98! \equiv a \pmod{101}$.

(Sie dürfen den Satz von Wilson ohne Beweis benutzen.)

(c) Im Folgenden bezeichne φ die Eulersche φ-Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ gilt $\varphi(n) \geq \varphi(m)$;

(ii) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi(2n) \geq \varphi(n)$;

(iii) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi(n) \mid \varphi(n^2)$.

Aufgabe 3

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}$, und es sei G eine einfache Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n mit $|G| > 2$. Zeigen Sie, dass G bereits eine Untergruppe der alternierenden Gruppe A_n ist.

(b) Es sei G eine einfache Gruppe der Ordnung 90. Zeigen Sie, dass G zu einer Untergruppe der alternierenden Gruppe A_6 isomorph ist.

(c) Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 90 gibt.

Aufgabe 4

Im Folgenden sei $R := \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ der Ring der ganzen Gauß'schen Zahlen. Ohne Beweis darf benutzt werden, dass dies ein Euklidischer Ring bezüglich der Normabbildung

$$N : R \to \mathbb{N}\,, x + iy \mapsto x^2 + y^2$$

und somit insbesondere ein Hauptidealring und ein faktorieller Ring ist.

(a) Bestimmen Sie alle $a \in R$ mit $N(a) \leq 5$.

(b) Schreiben Sie mit Hilfe von (a) jede der ganzen Zahlen aus $\{2, \ldots, 6\}$ als Produkt irreduzibler Elemente in R.

(c) Bestimmen Sie ein $d \in R$ mit $(d) = (5 + 10i, 1 + 3i)$. Zeigen Sie, dass $R/(d)$ ein Körper ist.

Aufgabe 5

Gegeben sei das Polynom $f := X^6 - 6 \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Es sei $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie den Grad $[L : \mathbb{Q}]$.

(b) Zeigen Sie, dass $L/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist. Zeigen Sie weiter, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ einen Normalteiler der Ordnung 6 enthält.

(c) Ist die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ abelsch?