Thema 1

Auch wenn es nicht in allen Aufgaben explizit gefordert wird, so sind alle Antworten zu begründen.

Aufgabe 1

Sei H die Menge aller reellen 2×2 - Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

mit $a^2 + b^2 \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe der Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ der invertierbaren reellen 2×2 - Matrizen ist.

(b) Seien $A, B, C \in H$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $AYB = C$ eine eindeutige Lösung Y in H hat.

(c) Lösen Sie die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Sei G eine Gruppe der Ordnung 2024 $(= 2^3 \cdot 11 \cdot 23)$. Zeigen Sie:

(a) G hat einen Normalteiler H der Ordnung 23.

(b) H operiert transitiv durch Konjugation auf den Untergruppen der Ordnung 11.

(c) G hat einen Normalteiler N der Ordnung 253.

(d) G ist auflösbar.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper und sei

$$R := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X] \;\middle|\; a_1 = 0 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass R ein Teilring (mit Eins) des Polynomrings $K[X]$ über K ist.

(b) Ist $f = X^3 \in R$ irreduzibel? Ist $f = X^3 \in R$ prim?

(c) Ist R ein faktorieller Ring?

(d) Geben Sie ein $a \in R$ an, sodass das Ideal (X^3, a) von R kein Hauptideal ist.

~~Begründen Sie dabei Ihre Aussagen.~~

Aufgabe 4

(a) Sei $K/\mathbb{Q}$ eine Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass jeder Körperautomorphismus von K ein $\mathbb{Q}$-Automorphismus ist.

(b) Sei K eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ und sei $\varphi : K \to K$ ein Körperhomomorphismus. Zeigen Sie, dass φ bijektiv ist.

(c) Geben Sie eine Körpererweiterung K von $\mathbb{Q}$ und einen Körperhomomorphismus $\varphi : K \to K$ an, der nicht bijektiv ist. Begründen Sie dabei Ihre Aussagen.

Aufgabe 5

(a) Zeigen Sie: Ist L/K eine Körpererweiterung vom Grad 2 und ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so ist $L \mid K$ eine Galoiserweiterung.

(b) Geben Sie eine Körpererweiterung L/K vom Grad 2 an, die nicht galoissch ist.

(c) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ eine Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$ vom Grad n an, die nicht galoissch ist, und geben Sie für Ihre Beispiele die Anzahl der Körperautomorphismen von K an. Begründen Sie dabei Ihre Aussagen.