##

JAHRGANGSSTUFE 09 I MATHEMATIK

**ARBEITSBLATT**

**EXKURSION: IX-QUADRAT**

Nachbereitung - Lösung

**BEWEISEN – Satz des Pythagoras**

**Die folgenden Lösungshinweise sollen die Lehrkräfte beim Einsatz des Materialsatzes unter-stützen. Sie enthalten nicht zu allen Aufgaben vollständige Lösungen. Ausdrücklich wird da-rauf hingewiesen, dass die Lösungshinweise nicht für die Schülerinnen und Schüler bestimmt sind.**

**ARBEITSAUFTRAG 01: Gruppenarbeit - Glaspyramide des Louvre**

1. **a) „Wie hoch ist die Pyramide?“**

**Bezeichnet man die Seitenlänge der Grundfläche mit s und die Länge der Seitenkanten mit t, so gilt:**

$$4s+4t=272,50m$$

**Mit s = 35m ergibt sich t**$≈$**33m**

**Für die Höhe h der Pyramide gilt gemäß Satz des Pythagoras:**

$$h^{2}+(\frac{1}{2}s\*\sqrt{2})^{2}=t^{2}$$

**Also: h**$≈$**22m**

**„Wie viel Glas wurde an der Pyramide insgesamt verarbeitet?“**

**Bezeichnet man die Länge der Höhen der Seitenflächen mit** $h\_{s}$ **so gilt gemäß Satz des Pythagoras:**

$$h^{2}+(\frac{s}{2})^{2}=h\_{s}^{2}$$

**Also:** $h\_{s}≈$**28m **

**Damit ergibt sich für den gesamten Inhalt der Seitenflächen:** $4\*\frac{1}{2}\*s\*h\_{s}≈1970m^{2}$

JAHRGANGSSTUFE 09 I MATHEMATIK

**ARBEITSBLATT**

**ARBEITSAUFTRAG 03: Gruppenarbeit - Kugelgeometrie**

1. **a) „Wie weit ragt die Kugel in den Becher hinein?“**

$$6cm-\sqrt{\left(6cm\right)^{2}-\left(5cm\right)^{2}}≈2,7cm$$

**„Wie weit ragt eine Kugel mit dem Durchmesser D in einen zylinderförmigen Becher mit dem Innendurchmesser d und d < D hinein?“**

$$\frac{D}{2}-\sqrt{(\frac{D}{2})^{2}-(\frac{d}{2})^{2}}$$

**„Bei welchem Verhältnis von D zu d ragt die Kugel genau um die Hälfte ihres Radius in den Becher hinein?“**

$$\frac{D}{2}-\sqrt{(\frac{D}{2})^{2}-(\frac{d}{2})^{2}}=\frac{D}{4}⟺\frac{D}{d}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

**b) „Wie weit kann man von einem 30m hohen Turm auf der Erdoberfläche aussehen?“**

**Bezeichnet man die Höhe des Turms mit h, die Sehweite mit s und den Radius der Erde mit r, so gilt:**

$$r^{2}+s^{2}=(r+h)^{2}$$

**Mit** $r≈6370km $**ergibt sich:**

$$s=\sqrt{(r+h)^{2}-r^{2}}≈19,5km$$

**„Wie hoch müsste ein Turm sein, um von ihm aus 50 km weit sehen zu können?“**

$$h=\sqrt{r^{2}+s^{2}}-r≈196m$$

JAHRGANGSSTUFE 09 I MATHEMATIK

**ARBEITSBLATT**

**ARBEITSAUFTRAG 05: Gruppenarbeit – Beweise**

1. **a) Altindischer Ergänzungsbeweis**
* **Voraussetzung:**

**Das Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b und c hat bei C einen rechten Winkel**$.$

* **Behauptung:**

**Es gilt** $a^{2}+b^{2}=c^{2}.$

* **Beweisführung:**

**Die Abbildungen 1 und 2 zeigen jeweils ein Quadrat mit der Seitenlänge a**$+b$**.**

****

**In den beiden Quadraten sind jeweils vier kongruente rechtwinklige Dreiecke mit den Seitenlängen a, b und c unterschiedlich angeordnet.**

**In Abbildung 2 gilt** $α+β+90°=180°$ **(Winkelsumme im Dreieck), also** $α+β=90°$**; mit ergibt sich** $δ=90°$**. Das gestrichelt gezeichnete Viereck, dessen Seiten die Länge c besitzen, ist also ein Quadrat.**

**Damit werden sowohl die beiden Quadrate mit den Flächeninhalten** $a^{2} $**und** $b^{2}$ **in Abbildung 1 als auch das Quadrat mit dem Flächeninhalt** $c^{2}.$ **in Abbildung 2 durch die vier kongruenten Dreiecke zu einem Quadrat mit der Seitenlänge a+b ergänzt.**

**Folglich gilt** $a^{2}+b^{2}=c^{2}.$

JAHRGANGSSTUFE 09 I MATHEMATIK

**ARBEITSBLATT**

**ARBEITSAUFTRAG 05: Gruppenarbeit – Beweise**

**b) Zerlegungsbeweis nach Perigal**

* **Voraussetzung:**

**Das Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b und c hat bei C einen rechten Winkel.**

* **Behauptung:**

**Es gilt** $a^{2}+b^{2}=c^{2}.$

* **Beweisführung:**

**Die Abbildung zeigt das Dreieck ABC, die beiden Quadrate über den Katheten sowie das Quadrat über der Hypotenuse. Die Strecke** $\left[DC\right]$ **ist parallel zur Seite** $\left[AB\right]$**, die Strecke** $\left[FB\right]$ **steht dazu senkrecht.**

**Es gilt** $β'=β$ **(Wechselwinkel) und** $β''=β$ **(paarweise zueinander senkrechte Seiten). Die Dreiecke ABC, DCB und FBE stimmen also in zwei Winkeln (**$β=β'=β''$ **und** $∡$**ACB =** $∡$**DBC =** $∡$**FEB = 90**$°$**) sowie der Länge a der jeweils eingeschlossenen Seite überein und sind damit kongruent.**

**Folglich gilt** $\overbar{DC}=\overbar{FB}=c$**,** $\overbar{DB}=\overbar{FE}=b$ **und** $α^{'}=α$**.**

**Da zudem im Quadrat BEGC gegenüberliegende Seiten parallel sind,**

* **lassen sich die Figuren 1, 2, 3 und 4 wie abgebildet im Quadrat AHIB anordnen;**
* **ist das gestrichelt gezeichnete Viereck eine Raute mit der
Seitenlänge b.**

**Im Dreieck DCB gilt** $α^{'}+β^{'}+90°=180°$ **(Winkelsumme im Dreieck), also**

$α^{'}+β^{'}=90°. $**Im Quadrat AHIB gilt** $α^{'}+β^{'}+δ=180°$**, also** $δ=90°$**. Die gestrichelt gezeichnete Raute ist also ein Quadrat.**

**Damit lassen sich die beiden Quadrate mit den Flächeninhalten** $a^{2}$ **und** $b^{2}$ **einerseits sowie das Quadrat mit dem Flächeninhalt** $c^{2}.$ **andererseits in fünf paarweise kongruente Figuren zerlegen.**

**Folglich gilt** $a^{2}+b^{2}=c^{2}.$

JAHRGANGSSTUFE 09 I MATHEMATIK

**ARBEITSBLATT**

**ARBEITSAUFTRAG 06: Gruppenarbeit – Kehrsatz**

1. **a) Kehrsatz des Pythagoras**

**Gilt für das Dreieck ABC, das die Seitenlängen a, b und c besitzt,** $a^{2}+b^{2}=c^{2}$**, so hat dieses Dreieck bei C einen rechten Winkel.**

**Beweis:**

* **Voraussetzung:**

**Im Dreieck ABC, das die Seitenlängen a, b und c besitzt, gilt** $a^{2}+b^{2}=c^{2}.$

* **Behauptung:**

**Das Dreieck hat bei C einen rechten Winkel.**

* **Beweisführung:**

**Es gibt ein Dreieck A’B’C‘, das bei C‘ einen rechten Winkel und Katheten der Längen a und b hat.
Bezeichnet man die Länge der Hypotenuse mit c‘, so gilt in diesem Dreieck gemäß Satz des Pythagoras** $a^{2}+b^{2}=c'^{2}$**.
Nach Voraussetzung gilt** $a^{2}+b^{2}=c^{2} $**und damit** $c'^{2}=c^{2}$**, d. h.** $c'=c$ **. Damit stimmen die beiden Dreiecke ABC und A’B’C‘ in allen Seitenlängen überein, sind also kongruent. Folglich hat das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel.**

**b) Die möglichen Anzahlen der Knoten ergeben sich aus den pythagoreischen Zahlentripeln, z. B. die Anzahl 12 aus dem Tripel (3, 4, 5). Mögliche Anzahlen sind insbesondere die Vielfachen von 12.**

JAHRGANGSSTUFE 09 I MATHEMATIK

**ARBEITSBLATT**

**ARBEITSAUFTRAG 07: Gruppenarbeit - Kürzeste Wege**

1. **a) „Angenommen, die Ameise möchte auf dem kürzesten Weg zur Fliege gelangen. Welchen Weg sollte sie wählen? Wie lang ist dieser Weg?“**

**Die beiden für die Ameise infrage kommenden Wege lassen sich in einem Teil eines Netzes des Quaders darstellen:**

****

* **Länge des Wegs 1:** $\sqrt{(1,25m)^{2}+(5,5m)^{2}}≈5,64m$
* **Länge des Wegs 2:** $\sqrt{(2,5m)^{2}+(4,25m)^{2}}≈4,93m$

**Die Ameise sollte folglich den Weg 2 wählen.**

**„Wie lang ist der kürzeste Weg der Fliege zur Ameise?“**

**Bezeichnet man die Länge der Diagonale der Wand, an der die Fliege sitzt, mit d, so gilt:**

$$\frac{d}{2}=\sqrt{(2,5m)^{2}+(1,25m)^{2}}≈2,80m$$

**Damit ergibt sich für die Länge des Wegs der Fliege:**

$$\sqrt{(3m)^{2}+(\frac{d}{2})^{2}}≈4,10m$$

**b) Bezeichnet man den Durchmesser der Rolle mit d und die Länge einer Mantellinie mit m, so gilt für die Länge l der Schnur**

****

* **bei einer Umwicklung:** $I=\sqrt{(d\*π)^{2}+m^{2}}$

**z. B.: Für d=4,2cm und m=9,7cm muss die Schnur etwa 16,4cm lang sein.**

* **bei zwei Umwicklungen:** $I=2\*\sqrt{(d\*π)^{2}+(\frac{m}{2})^{2}}$

**z. B.: Für d=4,2cm und m=9,7cm muss die Schnur etwa 28,1cm lang sein.**

* **bei n Umwicklungen:** $I=n\*\sqrt{(d\*π)^{2}+(\frac{m}{n})^{2}}$**.**

JAHRGANGSSTUFE 09 I MATHEMATIK

**ARBEITSBLATT**

**ARBEITSAUFTRAG 08: Gruppenarbeit - Möndchen des Hippokrates**

**Der Aussage liegt folgender Satz zugrunde:**

**Ist ein Dreieck rechtwinklig, so ist sein Flächeninhalt gleich dem Inhalt der beiden Flächenstücke, die von den Halbkreisen über den Katheten und dem Kreis durch die drei Eckpunkte eingeschlossen werden.**

**Beweis:**

* **Voraussetzung:**

**Das Dreieck ist rechtwinklig.**

* **Behauptung:**

**Der Flächeninhalt des Dreiecks ist gleich dem Inhalt der beiden Flächenstücke, die von den Halbkreisen über den Katheten und dem Kreis durch die drei Eckpunkte eingeschlossen werden.**

* **Beweisführung:**

**Gemäß Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras ist der Flächeninhalt des Halbkreises über der Hypotenuse gleich dem Flächeninhalt der beiden Halbkreise über den Katheten. Subtrahiert man von diesen übereinstimmenden Flächeninhalten jeweils den Inhalt der beiden Flächenstücke, die von den beiden Katheten und dem Kreis durch die drei Eckpunkte eingeschlossen werden, so ergibt sich die Behauptung.**