

---

---

# Zur Dynamik des AZIMUTHAL-RADIALEN PENDELS

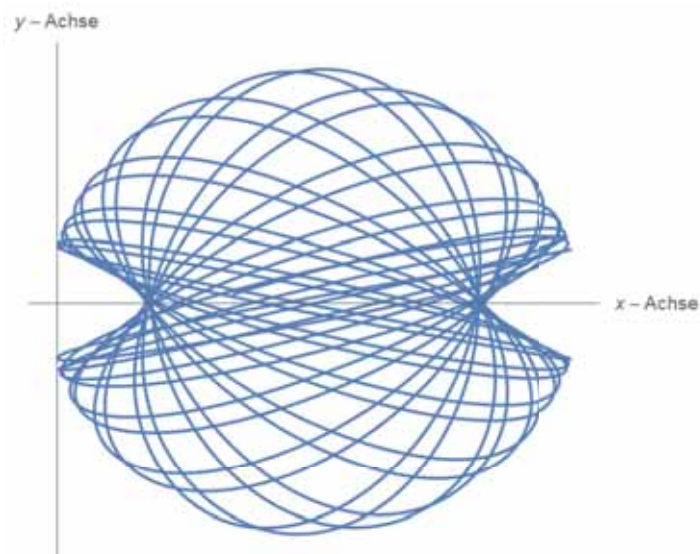
*Mathematische Modellierung, numerische Lösung und Experiment*

---

---

von

JONAS HAMP



Wissenschaftsseminar bei Dr. Maurer  
FRANZ-MARC-GYMNASIUM  
JULI 2019

## ABSTRAKT

Das radial-azimuthale Pendel ist das 11. Problem des IYPT 2018, der internationalen Physikmeisterschaft für junge Physiker. Bei der Aufgabe handelt es sich um ein komplexes System, bestehend aus einem sich in der Ebene bewegenden elastischen Stab und einem daran befestigten sphärischen Pendel.

Lenkt man das radial-azimuthale Pendel aus, so beginnt das Pendel nicht nur in „radialer“, sondern auch in „azimuthaler“ Richtung zu schwingen.

Hierbei versteht man unter radialer Schwingung die Schwingung eines Pendels unter dem Einfluss der Schwerkraft, unter azimuthaler Schwingung die periodische Bewegung der Schwingungsebene.

Es wurde ein mathematisches Modell aufgestellt, das die Bewegung beschreiben soll, die allgemeinen Bewegungsgleichungen wurden numerisch gelöst und ein Experiment zur Überprüfung der Theorie wurde durchgeführt.

## DEKLARATION DES AUTORS

**H**iermit bestätige ich, Jonas Hamp, dass die vorliegende Arbeit einzig und allein von mir verfasst wurde und alle benutzten Quellen vollständig angegeben wurden.

UNTERSCHRIFT: ..... DATUM: .....

## INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>iv</b>
<b>1 Problemstellung und Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Mathematische Modellierung und theoretische Lösung</b>	<b>3</b>
2.1 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten . . . . .	3
2.2 Herleitung der allgemeinen Bewegungsgleichungen . . . . .	4
2.3 Lösungsansatz für die Singularität . . . . .	7
2.4 Numerische Lösung . . . . .	8
2.4.1 Die Energien des Systems . . . . .	9
2.4.2 Die Trajektorien . . . . .	10
2.4.3 Periodische Bewegung des Pendels . . . . .	11
<b>3 Das Experiment</b>	<b>12</b>
3.1 Aufbau des Experimentes . . . . .	12
3.2 Durchführung des Experimentes . . . . .	13
3.3 Beobachtungen und Messung . . . . .	13
<b>4 Vergleich theoretischer und experimenteller Daten</b>	<b>14</b>
<b>5 Résumé</b>	<b>16</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>17</b>

## ABBILDUNGSVERZEICHNIS

ABBILDUNG	Seite
1.1 Das azimuthal-radiale Pendel . . . . .	1
2.1 Die Variablen des mathematischen Modells . . . . .	3
2.2 Koordinatensystem des elastischen Stabes . . . . .	7
2.3 Definition von $\theta'_2$ . . . . .	7
2.4 Definition von $\theta'_3$ . . . . .	7
2.5 Die Pendel-und Stabkoordinaten als Funktion der Zeit . . . . .	8
2.6 Die Energien des Systems . . . . .	9
2.7 Ebene Trajektorie des Pendels . . . . .	10
2.8 Räumliche Trajektorie des Pendels . . . . .	10
2.9 Trajektorie aus Sicht der yz-Ebene . . . . .	10
2.10 Plot der Positionen gegen Geschwindigkeit des Pendels . . . . .	11
3.1 Aufbau des Experimentes . . . . .	12
3.2 Experimentelle Daten als Funktion der Zeit . . . . .	13
4.1 Vergleich der experimentellen und theoretischen Daten von $x_P$ . . . . .	14
4.2 Vergleich der experimentellen und theoretischen Daten von $y_P$ . . . . .	15
4.3 Vergleich der experimentellen und theoretischen Daten von $z_P$ . . . . .	15
4.4 Vergleich der experimentellen und theoretischen Daten von $y_R$ . . . . .	15

## PROBLEMSTELLUNG UND EINLEITUNG

*Fix one end of a horizontal elastic rod to a rigid stand. Support the other end of the rod with a taut string to avoid vertical deflection and suspend a bob from it on another string (see figure). In the resulting pendulum the radial oscillations (parallel to the rod) can spontaneously convert into azimuthal oscillations (perpendicular to the rod) and vice versa. Investigate the phenomenon.<sup>1</sup>*

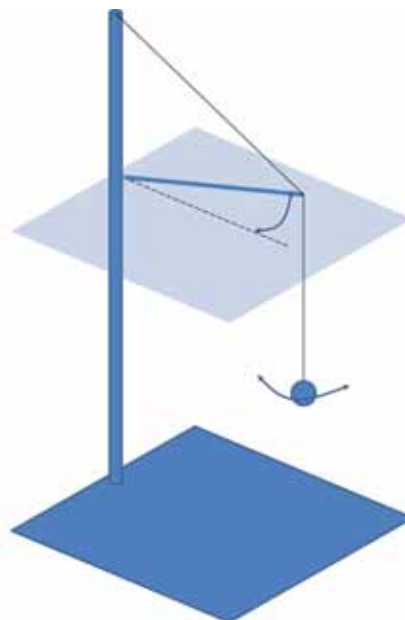


Abbildung 1.1: Das azimuthal-radiale Pendel

---

<sup>1</sup>Problem 11 des Aufgabenkataloges des 31. IYPT

Bei dem Problem handelt es sich um gekoppelte Schwingungen. Der elastische Stab wird mittels einer Schnur so fixiert, dass nur horizontale Bewegungen möglich sind. Am Ende des Stabes hängt ein sphärisches Pendel, das sich frei bewegen kann. (siehe **Abb. 1.1**)

Im mathematischen Modell (**Kapitel 2**) wird der elastische Stab durch eine Punktmasse am Ende eines masselosen Stabes beschrieben, deren Bewegung von Federn beeinflusst wird. Dies soll die Rückstellkraft des elastischen Stabes abbilden. Das sphärische Pendel entspricht der üblichen Darstellung, also einer Punktmasse befestigt an einem masselosen Faden konstanter Länge.

Stellt man nun die für das System nötigen Gleichungen mithilfe des Lagrange-Formalismus auf, so können die allgemeinen Bewegungsgleichungen abgeleitet und numerisch gelöst werden.

Mithilfe eines Versuchsaufbaus werden die Pendelbewegungen experimentell gemessen. Die verwendete Apparatur (siehe **Kapitel 3, Abb. 3.1**) entspricht genau dem in **Abb.1.1** dargestellten Aufbau.

Nach Durchführung des Versuches werden theoretische sowie experimentelle Ergebnisse miteinander verglichen (siehe **Kapitel 4**).

## MATHEMATISCHE MODELLIERUNG UND THEORETISCHE LÖSUNG

### 2.1 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

Um das Problem mathematisch zu beschreiben, wird der Lagrange-Formalismus benutzt. Hierbei werden generalisierte Variablen und Zwangsbedingungen genutzt, um die Energiegleichungen des Systems aufzustellen und dann allgemeine Bewegungsgleichungen mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung abzuleiten.

Es wird hierbei ein rechtsdrehendes Koordinatensystem benutzt. Hierbei ist die  $z$ -Achse die Vertikale.

Der elastische Stab hat die Länge  $r$  und die Punktmasse  $m$ . Er fängt im Ursprung des Koordinatensystems an und fällt in Ruhelage mit der  $x$ -Achse zusammen.

Seine Elastizität wird mithilfe einer Federkonstante  $k_y$  beschrieben. Da die Stablänge konstant ist, bewegt sich der Aufhängepunkt des Pendels auf

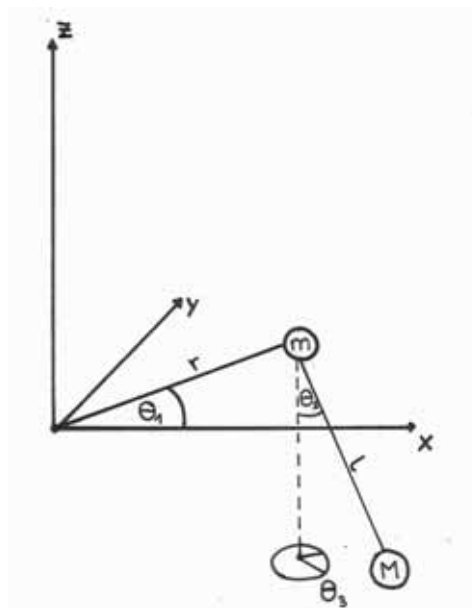


Abbildung 2.1: Die Variablen des mathematischen Modells



einer Kreisbahn. Daraus folgt:

$$(2.1) \quad r = \sqrt{x_R(t)^2 + y_R(t)^2} \quad \forall t$$

Da der Stab fixiert ist, kann er sich nur in der  $xy$ -Ebene bewegen. Es gilt:

$$(2.2) \quad z_R(t) = 0 \quad \forall t$$

Das Pendel  $P$  hat die konstante Länge  $l$  und die Punktmasse  $M$ .

Wegen der konstanten Länge gilt:

$$(2.3) \quad l = \sqrt{x_P(t)^2 + y_P(t)^2 + z_P(t)^2} \quad \forall t$$

Aus der Anzahl der oben genannten Zwangsbedingungen geht hervor, dass das System drei generalisierte Variablen und deren zeitliche Ableitungen zur Berechnung benötigt. Diese sind der Winkel des Stabes  $\theta_1$ , der seinen Ausschlag in der  $xy$ -Ebene beschreibt,  $\theta_2$ , der den Ausschlag des Pendels von der Vertikalen beschreibt und  $\theta_3$ , der die Rotation des Pendels um seine Vertikale beschreibt. (siehe **Abb. 2.1**)

## 2.2 Herleitung der allgemeinen Bewegungsgleichungen

Der Ortsvektor  $\vec{r}$  der Stabspitze des Stabes  $R$  ist:

$$(2.4) \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Und dessen zeitliche Ableitung  $\dot{\vec{r}}$  wird zu:

$$(2.5) \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{z}_R \end{pmatrix} = r \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Position des Pendels  $P$  wird durch die sphärischen Polarkoordinaten  $\vec{P}$  beschrieben und mit  $\vec{r}$  gekoppelt. Der Ortsvektor des Pendels  $\vec{l}$  ist definiert als:

$$(2.6) \quad \vec{l} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} = \vec{P} + \vec{r} = l \begin{pmatrix} \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ -\cos \theta_2 \end{pmatrix} + \vec{r}$$

Die zeitliche Ableitung  $\dot{\vec{l}}$  von  $\vec{l}$  ist:

$$(2.7) \quad \dot{\vec{l}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \\ \dot{z}_P \end{pmatrix} = \dot{\vec{P}} + \dot{\vec{r}} = l \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \cos \theta_3 \dot{\theta}_2 - \sin \theta_2 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 \\ \cos \theta_2 \sin \theta_3 \dot{\theta}_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 \\ \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \dot{\vec{r}}$$

Die Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}$  ist definiert als:

$$(2.8) \quad \mathcal{L} = T - V,$$

dabei ist  $T$  die gesamte kinetische Energie des Systems und  $V$  das Potential.

Nach Euler-Lagrange [1] gilt folgende Beziehung zwischen den generalisierten Koordinaten:

$$(2.9) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Wobei  $q_i$  die  $i$ -te generalisierte Koordinaten darstellt. Hier sind sie  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ .

Die Energiegleichungen ergeben sich zu:

$$(2.10) \quad T = T_P + T_R = \frac{M}{2} \dot{l}^2 + \frac{m}{2} \dot{r}^2$$

$$(2.11) \quad V = V_R + V_P = \frac{1}{2} k_y y_R^2 + M g z_P$$

Die Lagrange-Funktion wird nun zu:

$$(2.12) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( 2glM \cos \theta_2 - k_y r^2 \sin^2 \theta_1 + (m+M)r^2 \cos^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + 2lMr \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \left( \cos \theta_2 \sin \theta_3 \dot{\theta}_2 + \cos \theta_3 \sin \theta_2 \dot{\theta}_3 \right) + l^2 M \left( \dot{\theta}_2^2 + \sin^2 \theta_2 \dot{\theta}_3^2 \right) \right) = 0$$

Nun können die allgemeinen Differentialgleichungen abgeleitet werden:

Die Gleichung für  $\theta_1$  ist:

$$(2.13) \quad r \sin \theta_1 \left( k_y - (m+M) \dot{\theta}_1^2 \right) + (m+M)r \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 + lM \sin \theta_3 \left( -\sin \theta_2 \left( \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 \right) + \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 \right) + lM \cos \theta_3 \left( 2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \sin \theta_2 \ddot{\theta}_3 \right) = 0$$

Man kann erkennen, dass die Bewegung des Stabes in komplizierter Weise sowohl von der Pendelbewegung (u.a. von dem Rückstoß des Pendels auf seine Aufhängung, im Konkreten von Winkel, Geschwindigkeit und Beschleunigung) abhängt, als auch von der Rückstellkraft des Stabes (=Federkonstante). Dies führt zu einer komplexen Bewegung des Stabes wie es in **Abb. 2.5, 3.2** zu erkennen ist.

Die Gleichung für  $\theta_2$  ist:

$$(2.14) \quad \ddot{\theta}_2 = \sin \theta_2 \left( -\frac{g}{l} + \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_2 \right) - \frac{\ddot{y}_R}{l} \cos \theta_2 \sin \theta_3$$

Dabei ist  $\ddot{y}_R$ : (siehe auch **Gl. 2.4**)

$$\ddot{y}_R = -r \left( \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 \right)$$

Dabei beschreibt der erste Term der **Gl. 2.14** den Einfluss der Gravitation, der zweite Term den Einfluss der Zentrifugalkraft und der dritte Term den Einfluss der rücktreibenden Kraft des Stabes auf das Pendel. Ist der Aufhängepunkt in Ruhe, also  $\ddot{y}_R = 0$ , so reduziert sich diese Differentialgleichung auf die eines sphärischen Pendels [2]. Ist darüber hinaus die Zentrifugalkraft gleich null ( $\dot{\theta}_3 = 0$ ), so reduziert sich die Differentialgleichung auf die eines ebenen, physikalischen Pendels.

Die Gleichung für  $\theta_3$  ist:

$$(2.15) \quad \ddot{\theta}_3 = \frac{1}{\sin\theta_2} \left( -2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 \cos\theta_2 - \frac{\ddot{y}_R}{l} \cos\theta_3 \right)$$

Die **Gl. 2.15** kann umgeschrieben werden als:

$$(2.16) \quad l^2 \frac{d}{dt} \left( \dot{\theta}_3 \sin^2\theta_2 \right) = -l\ddot{y}_R \sin\theta_2 \cos\theta_3$$

Hier beschreibt die linke Seite der Gleichung **Gl. 2.16** die zeitliche Änderung des Drehimpulses und die rechte Seite das durch die Stabbewegung erzeugte Drehmoment. Wegen der periodischen Änderung des Drehmoments ( $\cos\theta_3$ ) stellt die Gleichung eine klassische Schwingungsgleichung dar. Ist die rechte gleich null, also  $\ddot{y}_R = 0$ , so bleibt der Drehimpuls erhalten und die Gleichung beschreibt die Dynamik eines sphärischen Pendels. Azimuthale Schwingungen finden nicht statt. Die Größe  $\ddot{y}_R$ , die Schwingung des Stabes, ist also Ursache für die azimuthale Schwingung und das koppelnde Element zwischen radialer und azimuthaler Schwingung.

Die Gleichungen **Gl. 2.13-2.15** stellen ein nichtlineares System gekoppelter Differentialgleichungen dar. Solche Systeme sind im allgemeinen nicht analytisch lösbar, sondern können nur mit numerischen Verfahren bearbeitet werden.

### 2.3 Lösungsansatz für die Singularität

Bei der numerischen Bearbeitung der obigen DGL stößt man auf eine Singularität, wenn der Abstand des Pendelkörpers von der Polstelle sehr klein wird. Aus **Gl. 2.15** wird ersichtlich, dass wenn  $\theta_2 \rightarrow 0$ ,  $\theta_3$  gegen unendlich läuft, da der Drehimpuls eine endliche Größe hat.

Der Abstand kann aus physikalischer Sicht nicht null werden, da ein sphärisches Pendel sich wegen der Zentrifugalkraft nicht unter dem Aufhängepunkt befinden kann (siehe **2.14**), ausgeschlossen ist der Trivialfall absoluter Ruhe. Um trotz der Singularität eine numerische Lösung zu finden, wird ein neuer Variablensatz mit folgenden Winkeln definiert:  $\theta_1$ ,  $\theta'_2$  und  $\theta'_3$ .

Die neue Variable  $\theta'_2$  ist der Winkel zwischen dem Pendel und der x-Achse (siehe **Abb. 2.3**), und  $\theta_3$  beschreibt die Rotation der Pendelebene in der yz-Ebene (siehe **Abb. 2.4**).

Der neue Variablensatz lässt sich aus dem alten Variablensatz mithilfe der Matrix  $R_y(\gamma)$  und dem Winkel  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  herleiten (dies entspricht einer Drehung von  $\frac{\pi}{2}$  um die y-Achse).

$$(2.17) \quad R_y(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Vektor der Kugelkoordinaten des Pendels  $\vec{P}$  wird wegen der Transformation zu  $\vec{P}'$ :

$$(2.18) \quad \vec{P}' = l \begin{pmatrix} \sin \theta'_2 \cos \theta'_3 \\ \sin \theta'_2 \sin \theta'_3 \\ + \cos \theta'_2 \end{pmatrix}$$

Und die neuen Pendelkoordinaten  $\vec{l}'$  werden dann zu:

$$(2.19) \quad \vec{l}' = R_y(\gamma)\vec{P}' + \vec{r} = l \begin{pmatrix} \cos \theta'_2 \\ \sin \theta'_2 \sin \theta'_3 \\ -\sin \theta'_2 \cos \theta'_3 \end{pmatrix} + \vec{r}$$

Auch die Startwerte müssen entsprechend der vorangegangenen Transformation umgerechnet werden:

$$(2.20a) \quad \theta'_2 = \arccos(\sin \theta_2 \cos \theta_3)$$

$$(2.20b) \quad \theta'_3 = \arctan(\tan \theta_2 \sin \theta_3)$$

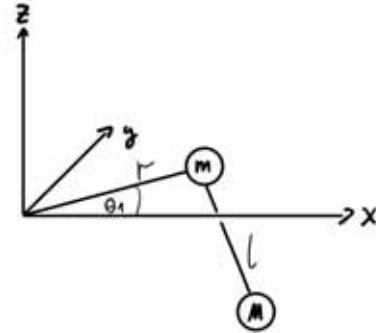


Abbildung 2.2: Koordinatensystem des elastischen Stabes

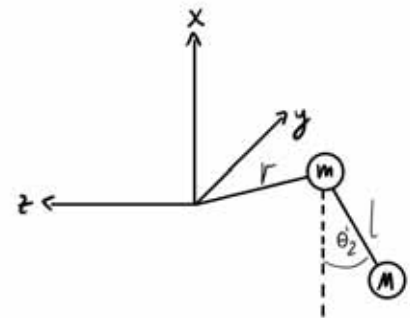


Abbildung 2.3: Definition von  $\theta'_2$

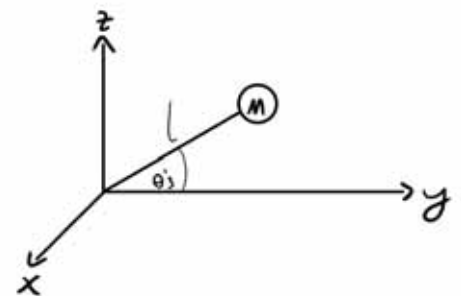


Abbildung 2.4: Definition von  $\theta'_3$

## 2.4 Numerische Lösung

Nun, da die Singularität die numerische Berechnung des Systems nicht mehr stört, können mithilfe von MATHEMATICA 12 STUDENT EDITION die Gleichungen numerisch gelöst werden. Die numerische Lösung wird formal durch

$$(2.21) \quad \theta_n(t_i) = \theta_n(0) + \sum_{k=1}^i \left( \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left( \int_{t_{k-1}}^{t_k} \ddot{\theta}_n(t, \ddot{\theta}_{\neq n}, \dot{\theta}_{\neq n}, \theta_{\neq n}) dt \right) dt \right)$$

beschrieben. Dabei ist  $t_i$  der Zeitpunkt der i-ten Iteration und  $\theta_n(0)$  der Startwinkel der Variable  $\theta_n$ .

Die Lösung kann nun als Funktion der Positionen in Abhängigkeit der Zeit geplottet werden. Die **Abb. 2.5** zeigt als Funktion der Zeit die mit Hilfe der Winkel  $\theta_1$  bis  $\theta_3$  berechneten Positionen des Pendels und seines Aufhängepunktes. Hierbei wurden für die Kalkulation die gleichen Parameter- und Startwerte (siehe Beschriftung unterhalb **Abb. 2.5**) wie im Experiment verwendet.

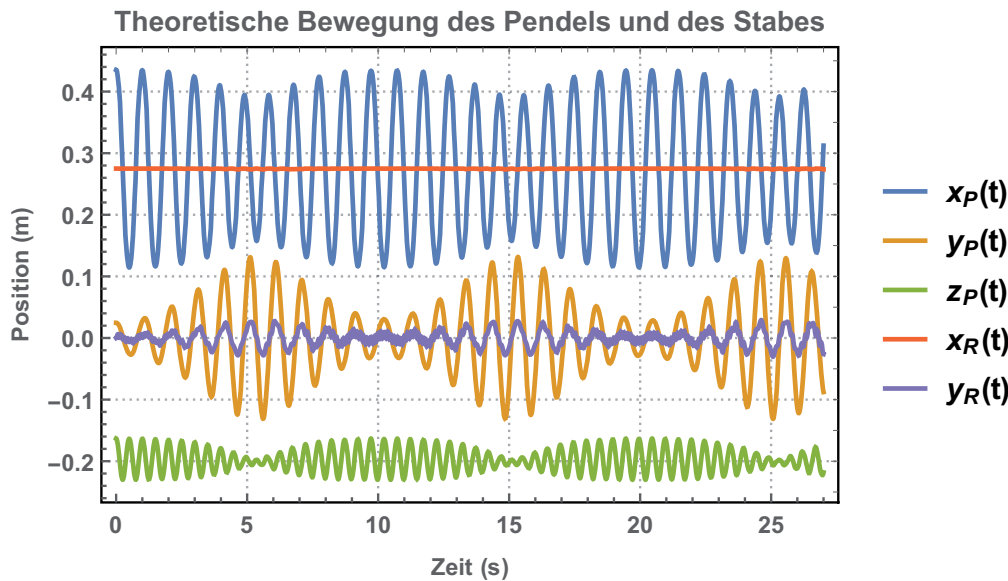


Abbildung 2.5: Die Pendel- und Stabkoordinaten als Funktion der Zeit

Die Konstanten sind:  $l = 0,23 \text{ m}$ ,  $r = 0,275 \text{ m}$ ,  $M = 0,04 \text{ kg}$ ,  $m = 0,004 \text{ kg}$ ,  $k_y = 8,3 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$ ,  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ,  $T = 27 \text{ s}$

Und die Startwerte sind:  $\theta_1 = 0$ ,  $\dot{\theta}_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 0,8 \text{ RAD}$ ,  $\dot{\theta}_2 = 0$ ,  $\theta_3 = 0,15 \text{ RAD}$ ,  $\dot{\theta}_3 = 0$

In **Abb. 2.5** kann man bereits gut erkennen, wie die Bewegung des Systems in etwa aussieht: Wie erwartet ändert sich  $x_R$  nur sehr geringfügig, Ausschläge sind dann zu beobachten, wenn der Abstand des Pendelkörpers in y-Richtung groß wird.

Bei  $x_P$ , dem Graphen in blau, erkennt man, dass seine Amplitude abnimmt, während  $y_P$  zunimmt. Dies ist der Übergang von der anfänglichen radialen Schwingung in die radial-azimuthale

Schwingung. Der Graph ist um die Stablänge verschoben.

$y_P$ , das den azimuthalen Schwingungsanteil beschreibt, erreicht dann maximale Werte, wenn  $x_P$  minimale Werte erreicht.  $y_P$  ist in Phase mit  $y_R$ , da beide Schwingungen durch die Kopplung stark voneinander abhängig sind.  $z_P$  nimmt ab, wenn  $y_P$  zunimmt.

### 2.4.1 Die Energien des Systems

Auch können die Energien des Systems nun untersucht werden:

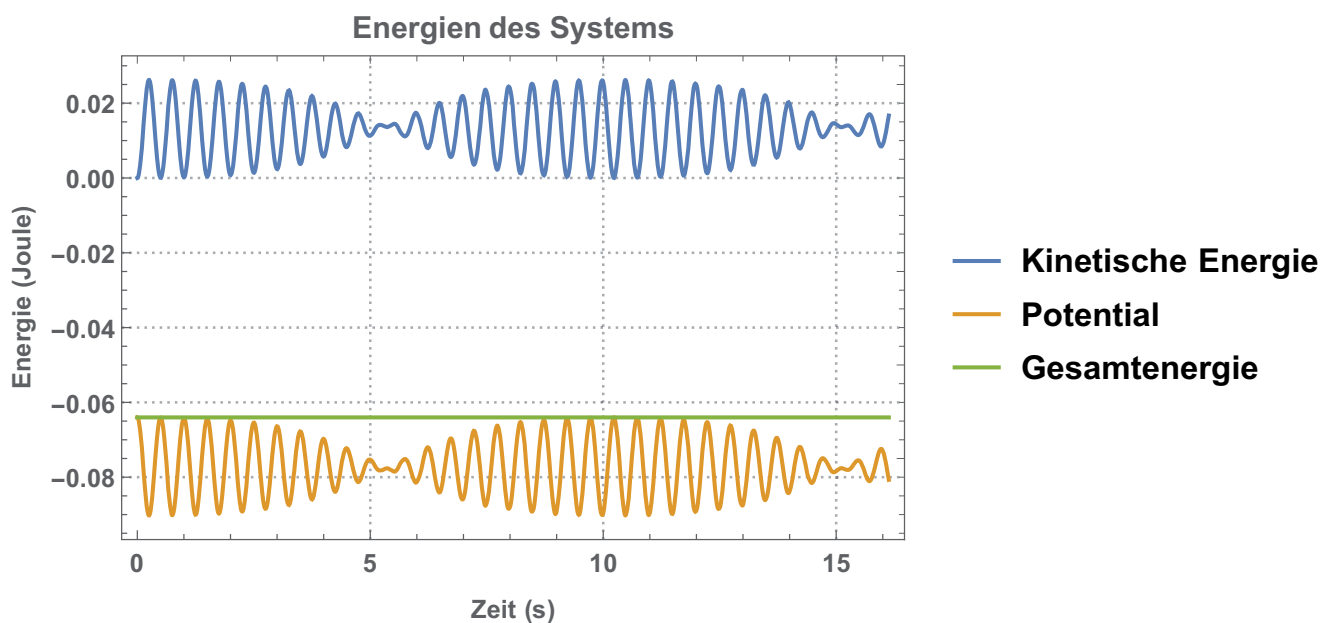


Abbildung 2.6: Die Energien des Systems

Die Konstanten sind:  $l = 0,23 \text{ m}$ ,  $r = 0,275 \text{ m}$ ,  $M = 0,04 \text{ kg}$ ,  $m = 0,004 \text{ kg}$ ,  $k_y = 8,3 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$ ,  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ,  $T = 16,13 \text{ s}$

Und die Startwerte sind:  $\theta_1 = 0$ ,  $\dot{\theta}_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 0,8 \text{ RAD}$ ,  $\dot{\theta}_2 = 0$ ,  $\theta_3 = 0,15 \text{ RAD}$ ,  $\dot{\theta}_3 = 0$

Die Gesamtenergie bleibt konstant, man kann also auf fehlerfreie Berechnung in diesem Bereich schließen. Die kinetische Energie und das Potential verlaufen in entgegengesetzter Phase.

### 2.4.2 Die Trajektorien

Plottet man die Trajektorie des Pendels, so kann man die azimuthale Schwingung des Pendels erkennen. Dabei bewegt sich die Schwingungsebene des Pendels erst gegen den Uhrzeigersinn und dann im Uhrzeigersinn zurück. Die anfängliche Bewegungsart (mit oder gegen den Uhrzeigersinn) hängt dabei von der Startgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_3$  ab. Ist  $\dot{\theta}_3 > 0$ , so bewegt sich das Pendel anfangs gegen den Uhrzeigersinn, ist  $\dot{\theta}_3 < 0$ , so bewegt es sich anfangs im Uhrzeigersinn.

Der Startpunkt des Pendels befindet sich dabei in der oberen, rechten Ecke der rechten Einbuchtung der ebenen Trajektorie. Das Pendel bewegt sich dann bis zur unteren Ecke der linken Einbuchtung und kehrt dann in Richtung des Ausgangspunktes zurück.

Auch kann die Trajektorie aus Sicht der yz-Ebene betrachtet werden.

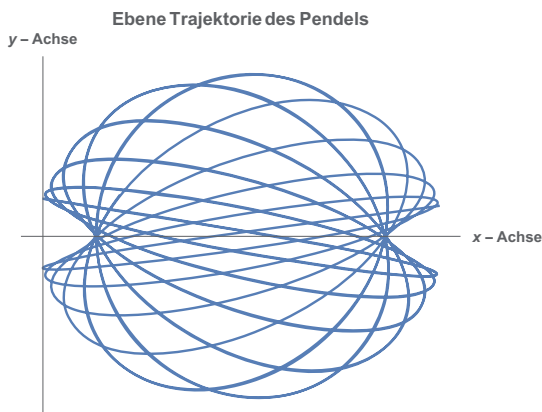


Abbildung 2.7: Ebene Trajektorie des Pendels

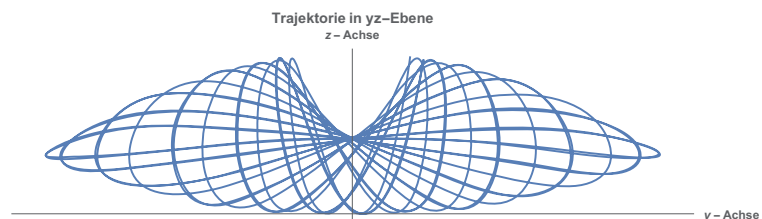


Abbildung 2.9: Trajektorie aus Sicht der yz-Ebene

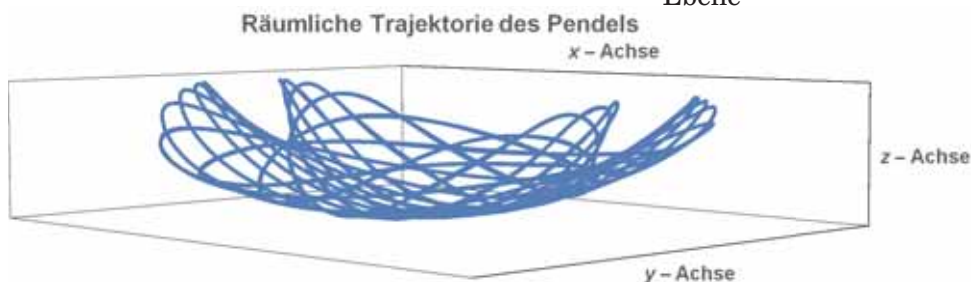


Abbildung 2.8: Räumliche Trajektorie des Pendels

Die Konstanten sind:  $l = 0,23 \text{ m}$ ,  $r = 0,275 \text{ m}$ ,  $M = 0,04 \text{ kg}$ ,  $m = 0,004 \text{ kg}$ ,  $k_y = 8,3 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$ ,  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ,  $T = 16,13 \text{ s}$

Und die Startwerte sind:  $\theta_1 = 0$ ,  $\dot{\theta}_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 0,8 \text{ RAD}$ ,  $\dot{\theta}_2 = 0$ ,  $\theta_3 = 0,15 \text{ RAD}$ ,  $\dot{\theta}_3 = 0$

### 2.4.3 Periodische Bewegung des Pendels

In **Abb. 2.8** werden die Positionen  $x_P$ ,  $y_P$ , und  $z_P$  gegen deren zeitliche Ableitungen  $\dot{x}_P$ ,  $\dot{y}_P$  und  $\dot{z}_P$  geplottet. Anhand des Graphen kann auf periodische Bewegung des Pendels geschlossen werden, da die geplotteten Graphen ein periodisches Muster ergeben.

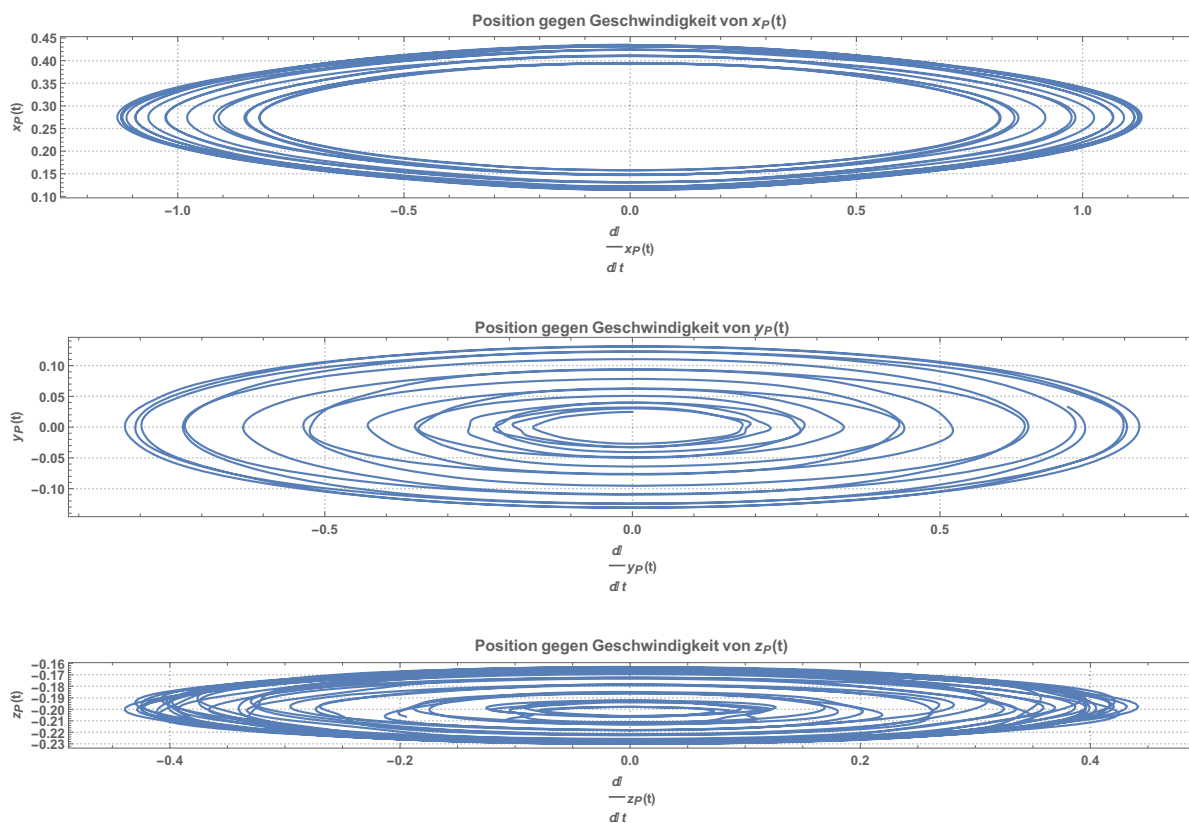


Abbildung 2.10: Plot der Positionen gegen Geschwindigkeit des Pendels

Die Konstanten sind:  $l = 0,23 \text{ m}$ ,  $r = 0,275 \text{ m}$ ,  $M = 0,04 \text{ kg}$ ,  $m = 0,004 \text{ kg}$ ,  $k_y = 8,3 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$ ,  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ,  $T = 16,13 \text{ s}$

Und die Startwerte sind:  $\theta_1 = 0$ ,  $\dot{\theta}_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 0,8 \text{ RAD}$ ,  $\dot{\theta}_2 = 0$ ,  $\theta_3 = 0,15 \text{ RAD}$ ,  $\dot{\theta}_3 = 0$



## DAS EXPERIMENT

### 3.1 Aufbau des Experimentes

Wie in **Abb 3.1** zu erkennen ist, besteht der experimentelle Aufbau aus einem festen Gerüst, an dem ein elastischer Stab der Länge  $r = 0,275m$  und der Masse  $m = 0,004kg$  befestigt ist. Die Federkonstante ist etwa  $k_y = 8,3 \frac{kg}{s^2}$ . Am Ende dieses Stabes ist eine Masse  $M = 0,04kg$  an einem näherungsweise masselosen Faden der Länge  $l = 0,23m$  aufgehängt. Dies ist das sphärische Pendel.

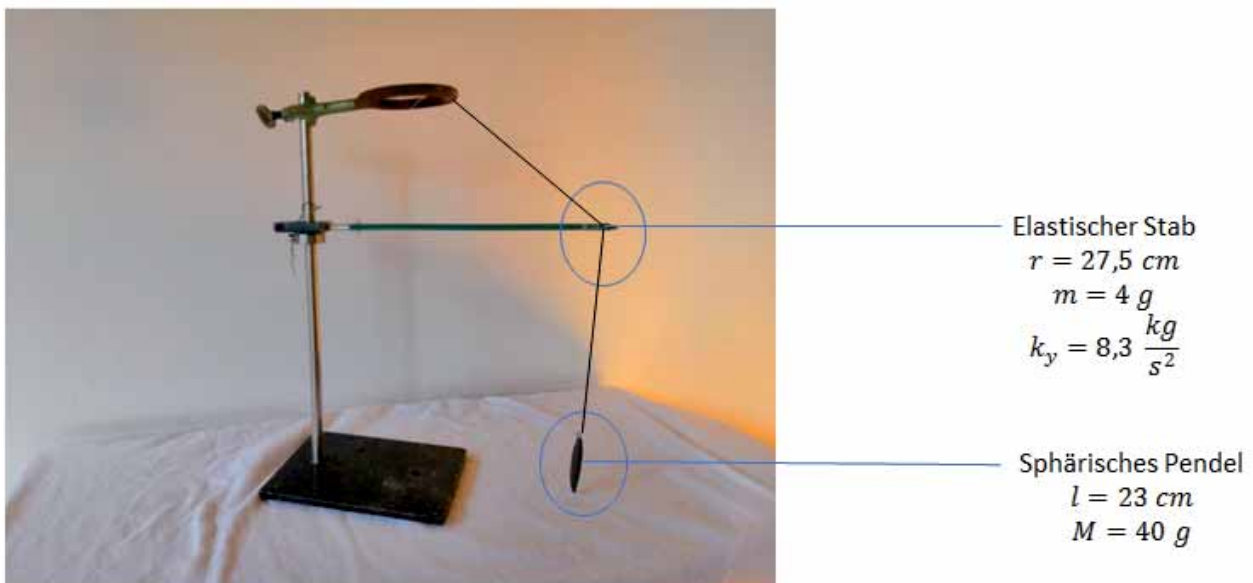


Abbildung 3.1: Aufbau des Experimentes

### 3.2 Durchführung des Experimentes

Die Startwerte des Stabes sind  $\theta_1 = 0$  und  $\dot{\theta}_1 = 0$  und die des Pendels sind  $\theta_2 = 0,8RAD$ ,  $\dot{\theta}_2 = 0$ ,  $\theta_3 = 0,15RAD$  und  $\dot{\theta}_3 = 0$ .

Das Pendel wird ausgelenkt und beginnt zu schwingen.

### 3.3 Beobachtungen und Messung

Nach der anfänglichen Auslenkung beginnt das Pendel sowohl in radialer als auch in azimuthaler Richtung zu schwingen.

Aus den Beobachtungen mit bloßem Auge konnte die Theorie bereits qualitativ bestätigt werden. Für einen quantitativen Vergleich zwischen Experiment und Theorie wurde das Experiment mit Kameras aufgezeichnet, digitalisiert und mithilfe von Tracker<sup>1</sup>, einem Videoanalyse-Programm, ausgewertet. So konnten die Positionen des Stabes und des Pendels als eine Funktion der Zeit evaluiert werden.

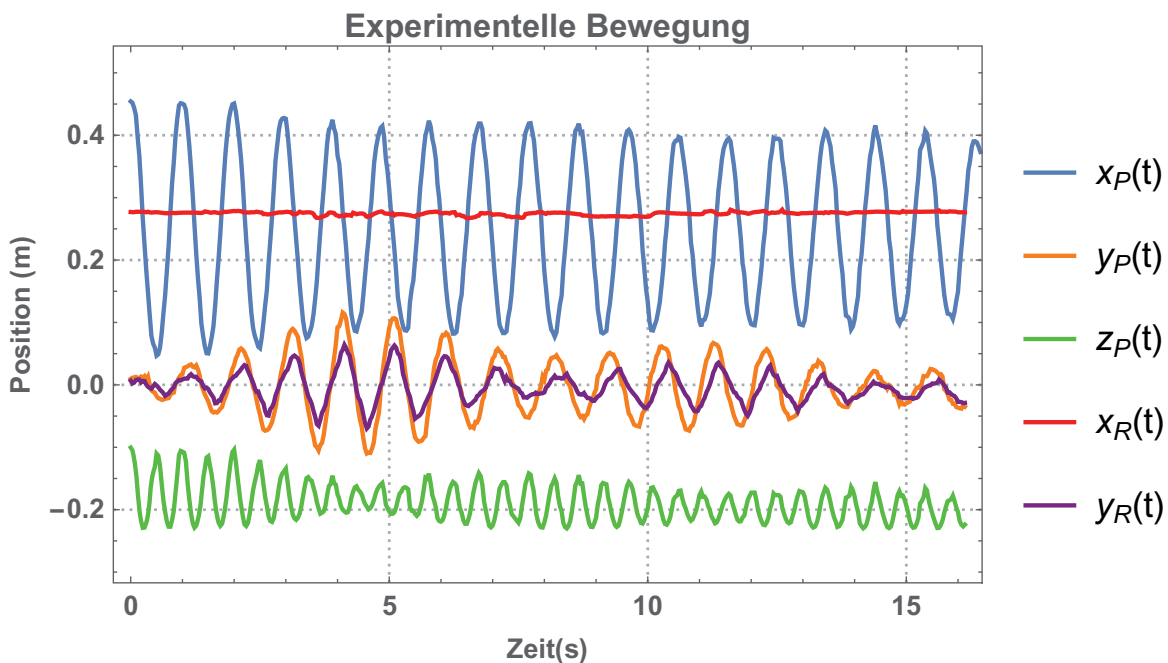


Abbildung 3.2: Experimentelle Daten als Funktion der Zeit

<sup>1</sup><http://physlets.org/tracker/>

## VERGLEICH THEORETISCHER UND EXPERIMENTELLER DATEN

Nachdem in **Kapitel 3.3** mithilfe des Videotrackings die Bewegung des Systems quantitativ gemessen werden konnte, wird die Theorie nun ebenfalls quantitativ getestet. In den folgenden Abbildungen (**Abb. 4.1-4.4**) werden die experimentellen Größen mit den jeweiligen theoretischen Berechnungen verglichen.

Im Folgenden ist zu beachten, dass in der Theorie Einflussgrößen, wie zum Beispiel Luftwiderstände und Reibungen, die im Experiment relevant sind, nicht berücksichtigt wurden.

Allgemein erkennt man, dass die beobachteten und berechneten Phasen für die verschiedenen Größen sehr gut übereinstimmen, d.h. das Zeitverhalten durch das Modell sehr gut beschrieben wird. Die Übereinstimmung der gemessenen und berechneten Amplituden ist meist gut, mit Ausnahme der Größe  $z_P$  in den ersten und letzten 5s.

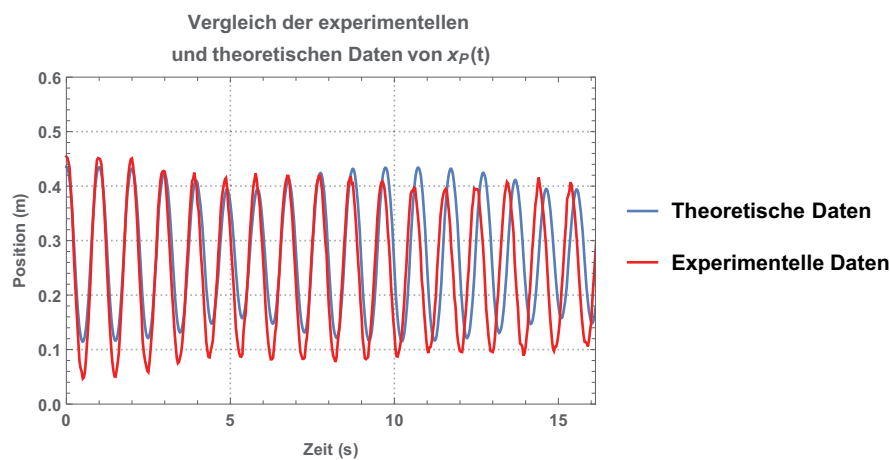


Abbildung 4.1: Vergleich der experimentellen und theoretischen Daten von  $x_P$

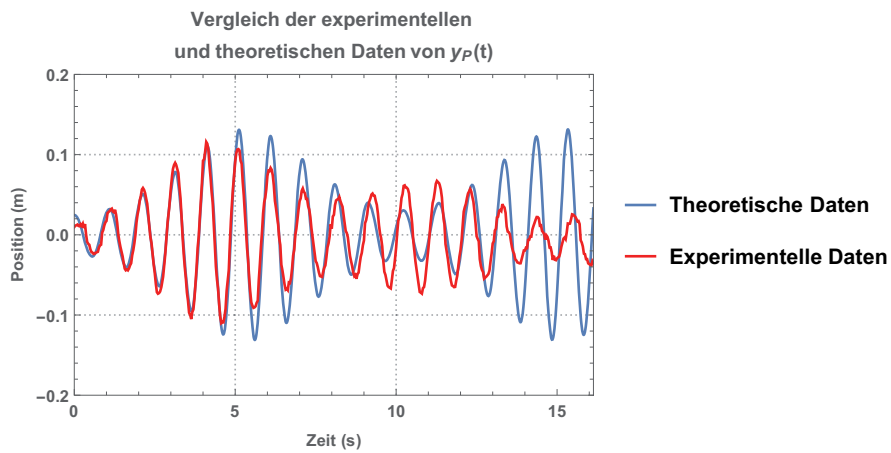


Abbildung 4.2: Vergleich der experimentellen und theoretischen Daten von  $y_P$

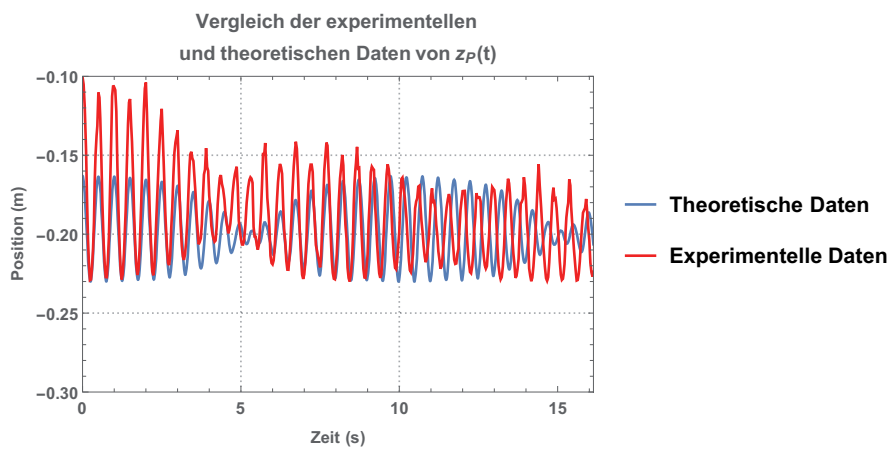


Abbildung 4.3: Vergleich der experimentellen und theoretischen Daten von  $z_P$

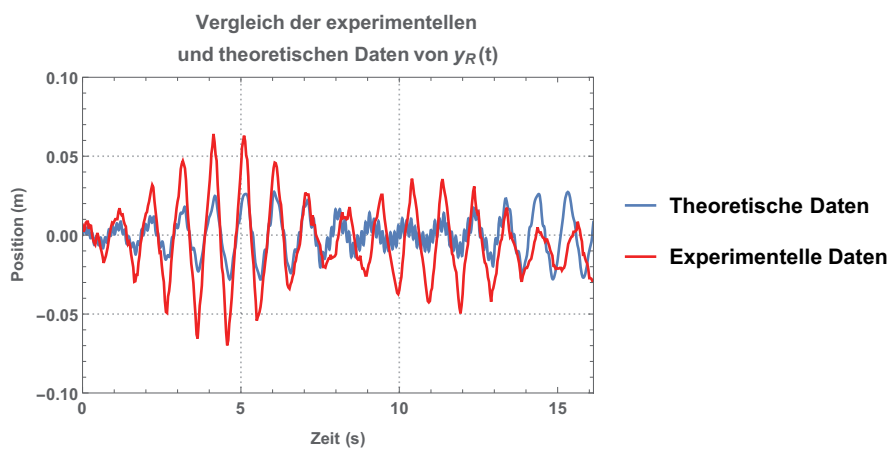


Abbildung 4.4: Vergleich der experimentellen und theoretischen Daten von  $y_R$

## RÉSUMÉ

**D**as azimuthal-radiale Pendel wurde theoretisch und experimentell untersucht. Dabei zeigte sich, dass das in **Kapitel 2** aufgestellte Modell die Dynamik des Systems gut beschreibt.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics (Chapter 2 Variational Principles and Lagrange's equations)*, Eddison-Wesley Publishing Company, Inc., 6. Auflage aus dem Juni 1959.
- [2] L.BERGMANN-CL.SCHÄFER, *Lehrbuch der Experimentalphysik (Kapitel IV, Abschnitt 36)*, Walter De Gruyter CO., 5. Auflage aus dem Jahre 1958.