

# Die Kräfte beim Auseinanderziehen ineinandergelegter Telefonbücher

## 1. Kurzfassung:

Man nehme zwei Softcoverbücher, zum Beispiel Telefonbücher, und legt diese so vor sich, dass die offenen Seiten der Bücher zueinander zeigen. Dann legt man die Bücher, abwechselnd je eine Seite nehmend, ineinander. Bei wenigen Seiten ist es noch recht einfach die beiden zu trennen, wenn man allerdings die Regionalen Telefonbücher aus Rosenheim nimmt und ganz ineinander legt, dann ist es überraschend schwer sie wieder zu trennen. Selbst ein Mensch kann sich daran hängen, vorausgesetzt man hat eine passende Aufhängung, und wenn man das nicht hat, wird es schon ein Spaß, die beiden Bücher wieder auseinander zu bekommen.

## Inhaltsverzeichnis:

1. Kurzfassung.....	1
2. Einführung.....	2
3. Versuche .....	2
3.1. Versuchsaufbau, -ablauf und -auswertung.....	2
3.2. Bücher Jahrgang 2015.....	4
3.2.1. Einzelne Seiten.....	4
3.2.2. Seiten gebündelt.....	4
3.2.3. Vergleich Einzel und Gebündelt.....	5
3.2.4. Weiter/ weniger weit ineinander gelegt.....	5
3.2.5. Schräg ziehen.....	6
3.2.6. Schütteln.....	6
3.2.7. Härtetest.....	7
3.2.8. Fazit.....	7
3.3. Bücher Jahrgang 2017.....	7
3.3.1. Verkürzt.....	8
3.3.2. Halbiert.....	8
3.3.3. Jede 2. Seite herausgetrennt.....	9
3.3.4. Fazit.....	10
4. Theorie.....	10
4.1. Grundsätzliche Erklärungen.....	10
4.2. Formel.....	11
4.2.1. Herleitung.....	11
4.2.1.1. Grundidee.....	11
4.2.1.2. Mathematische Beschreibung.....	12
4.2.2. Einschränkung.....	14
4.3. Berechnungen und Graphen.....	14
4.4. Vergleich Theorie und Praxis.....	15
5. Literaturverzeichnis.....	16

## 2. Einführung:

Auf die Idee gekommen mit Telefonbüchern zu arbeiten bin ich durch den Physikwettbewerb GYPT (German Youth Physicists Tournament) gekommen, wo es eine der zu bearbeiteten Aufgaben war. Nach dem Wettbewerb wollte ich das Projekt doch noch nicht zur Seite legen, weil Fragen offen waren, die ich zu damals nicht beantworten konnte. Mittlerweile, nachdem ich mich die letzten Jahre damit beschäftigt habe, habe ich mehrere hundert Versuche durchgeführt und eine Theoretische Näherung entwickelt, die sinnvolle Graphen ergibt. Was mich an diesem Projekt besonders fasziniert hat, war, dass es relativ einfach ist die Versuche zu machen und das Phänomen, dass die Bücher unerwartet schwer zu trennen sind, ist auch schnell selbst zu bemerken. Auch finde ich es erstaunlich, dass man es jedem zeigen kann, auch ohne komplizierte Aufbauten zu brauchen: zwei Taschenbücher oder Magazine reichen dafür aus.

## 3. Versuche

### 3.1 Versuchsaufbau, -ablauf und -auswertung

Der verwendete Aufbau, wie rechts (Abb. 1) gezeigt, besteht aus den angegebenen Mitteln: Schraubzwingen, Telefonbüchern, einem Kraftmesser<sup>1</sup>, Aluminiumleisten und einem Laptop, mit der Messsoftware Logger Lite, die mir von der Schule<sup>2</sup> zur Verfügung gestellt wurde.

Da zum einen der Kraftmesser nur bis 50N zuverlässig messen kann, ist es nicht möglich die Kraft exakt zu bestimmen, wenn die Bücher ganz ineinander gelegt sind, zum

anderen gibt es dabei eine andere Problematik, auf die in „3.2.7 Härtetest“ eingegangen wird. Daher habe ich in den meisten Versuchen die Bücher zur Messung nie ganz ineinander gelegt sondern wie in nachfolgender Graphik gezeigt. Zur einfacheren Darstellung wird es in den Skizzen gezeigt, als wären die Bücher ganz ineinander gelegt. Die Fotos, zeigen wie die Bücher bei den Versuchen tatsächlich aussahen.

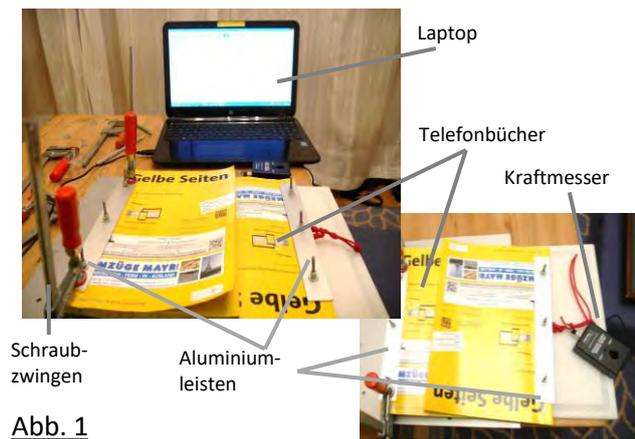


Abb. 1

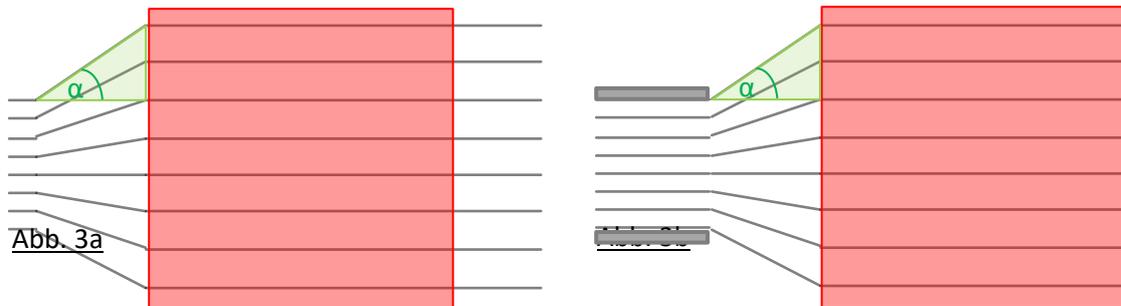


Abb. 2

<sup>1</sup> Dual-Range Force Sensor von Vernier order code: DFS-BTA

<sup>2</sup> Ignaz-Günther Gymnasium Rosenheim

Ob durch die Aluminiumleisten das Messergebnis beeinflusst wird, ist leider nicht messbar, aber anhand folgender Skizze ist erkennbar, dass sich faktisch am Winkel  $\alpha$  bei gleicher Fläche von nichts ändert, solange die Länge der Seiten gleich lang ist. Sollte aber der Abstand zwischen der ineinandergelegten Fläche und Buchrücken, aka der Punkt, ab dem sich die Seiten abwinkeln können, verändert werden, dann ändert sich der Winkel  $\alpha$ . Deswegen ist auch das „Ende“ des Buches in Abb. 3a nicht markiert. Diesen Effekt sieht man bspw. auch in den Versuchen „3.3.1 Verkürzt“ und „3.3.2 Halbiert“.



Den Versuchsablauf kann man recht einfach kurz zusammenfassen: man legt zuerst die Bücher auf gewünschte Weise, was in den bei den einzelnen Versuchen beschrieben wird, ineinander, dann befestigt man ein Buch an der Unterlage, z.B. am Tisch, startet die Messung und zieht die Beiden auseinander.

Beim Ineinanderlegen ist es ratsam unter das oben aufliegende Buch mit einem Buch zu unterstützen, um ein ordentliches und gerades Ineinanderlegen zu ermöglichen.



Abb. 4 ist ein Screenshot meines Laptops von einem Versuch zu „3.2.1 Einzelne Seiten“ mit 110 Seiten, die 10 cm weit ineinandergelegt waren. Der rote Graph zeigt den Kraftverlauf. Zur Auswertung ist die Funktion „Statistik“ von Logger Lite nützlich, da einem das Maximum des Graphen direkt ausgegeben wird. Den höchsten Wert habe ich genommen, da es mir um die Haftreibung geht und dieser Wert solange steigt, bis die Kraft in Gleitreibung umgewandelt wird. Dies geschieht sobald die Seiten anfangen auseinander zu rutschen.

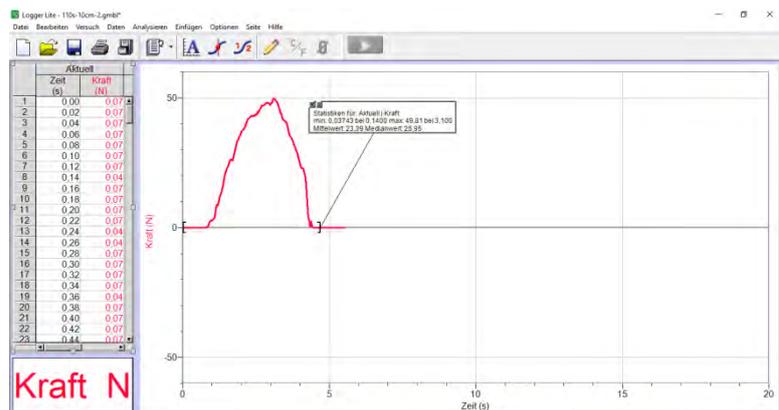


Abb. 4

Bei den Graphen stehen unten Zahlen, die sich auf die faktische Anzahl der ineinandergelegten Seiten, also Seiten von Buch eins plus Buch zwei zusammengezählt. Also nicht auf die Anzahl der Seiten eines Buches, da ich beim Zusammenlegen die Seitenzahl notiert habe, die ich beim Beginn gesehen habe. Dies ergibt die Anzahl der am Ende faktisch ineinandergelegten Blätter.

## 3.2 Bücher Jahrgang 2015

### 3.2.1 Einzelne Seiten

In diesen Versuchen wurde jeweils eine einzelne Seite des Buches zwischen einzelne Seiten des anderen Buches gelegt, wie in Abb. 5a gezeigt. In Abb. 5b sind Versuche mit dreißig, bzw. hundertzehn 10cm weit ineinandergelegten Seiten abgebildet.



Abb. 5a

Im Graphen ist nun als schwarze Punkte der Mittelwert von mindestens fünf Versuchen mit Fehlerbalken eingezeichnet. Diese Anzahl von Versuchen ist zur

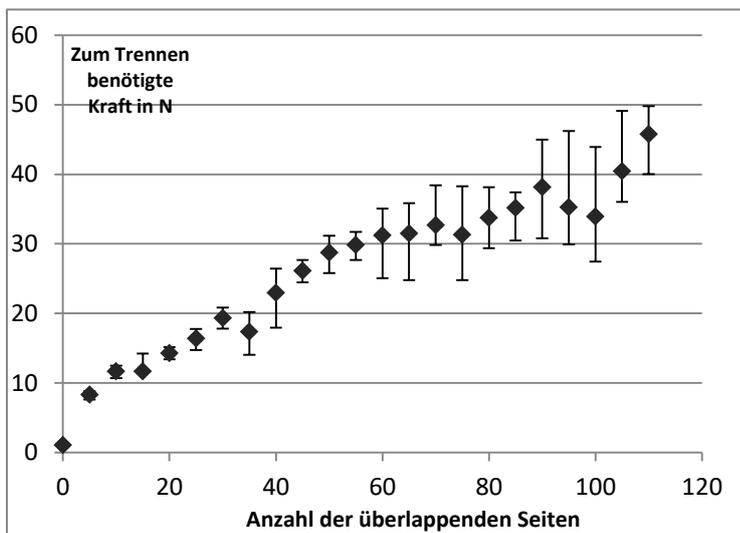


Abb. 5b

Bestimmung eines möglichst genauen Mittelwerts Standard bei den Versuchen. Man sieht, dass mit zunehmender Seitenzahl auch die zum Trennen benötigte Kraft steigt.

Abb. 6

### 3.2.2 Seiten gebündelt

Wenn man nun die Seiten anstatt einzeln in Bündeln, wie in Abb. 7a und Abb. 7b gezeigt, ineinanderlegt, erhält man folgende Ergebnisse: umso weniger Seiten in einem Bündel sind, desto mehr Bündel gibt es, desto größer ist die Kraft; umso mehr in einem Bündel sind, desto weniger Bündel, desto kleiner die Kraft.

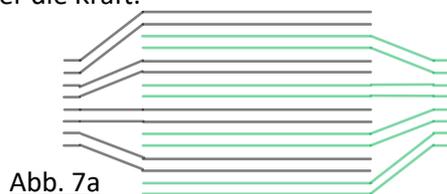


Abb. 7a



Abb. 7b

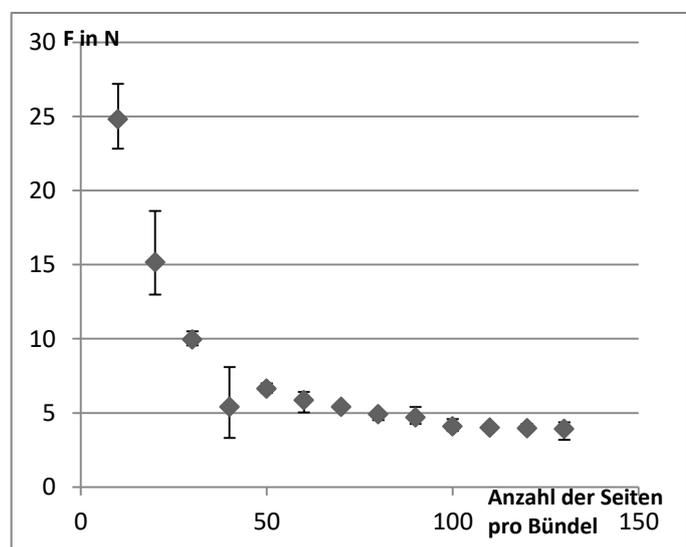


Abb. 8

### 3.2.3 Vergleich Einzeln und Gebündelt

Wenn man rein davon ausgeht, dass die Kraft durch die Kontaktflächen entsteht, dann müsste bei den Versuchen mit 10 Seiten pro Bündel bei 250 Seiten die Kraft ungefähr mit dem Wert von den Versuchen zu 25 ineinandergelegten Seiten übereinstimmen. Allerdings beträgt der Mittelwert zu erstem 24,8N, bei zweitem 16,4N. Selbst wenn man den niedrigsten Wert der Bündelversuche, 22,8N, und den höchsten der Versuche mit den einzelnen Seiten, 17,8N, dann hat man immer noch eine Differenz von ungefähr 3N.

Das mag unter Umständen eine ausreichende Begründung sein, dass die Kontaktflächen, durch Aufsummierung einer Einzelfläche zur die Gesamtfläche, keine ausreichende Repräsentation für die Kräfte sind, aber deutlichere praktische Nachweise werden in „3.3 Bücher Jahrgang 2017“ gegeben.

### 3.2.4 Weiter/ weniger weit ineinander gelegt

Wenn man nun die Bücher nur 5cm (Abb. 9a und Abb. 9b) oder 15cm (Abb. 10a und Abb. 10b) weit ineinander legt erhält man folgende Werte.

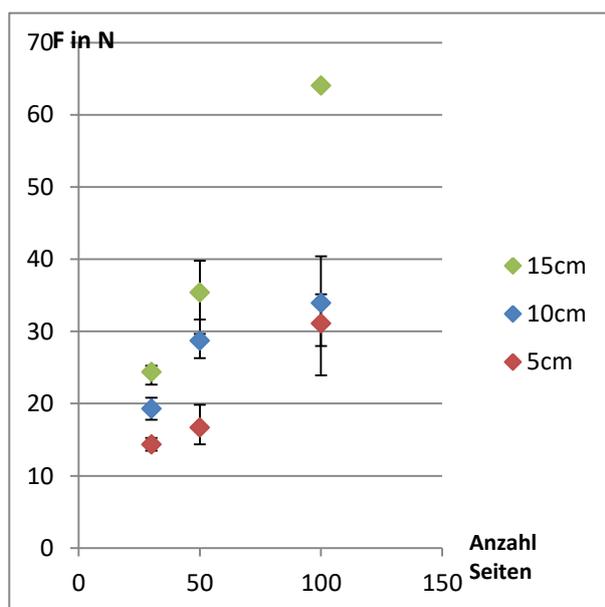


Abb. 11

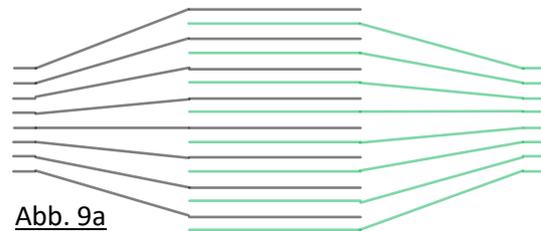


Abb. 9a



Abb. 9b

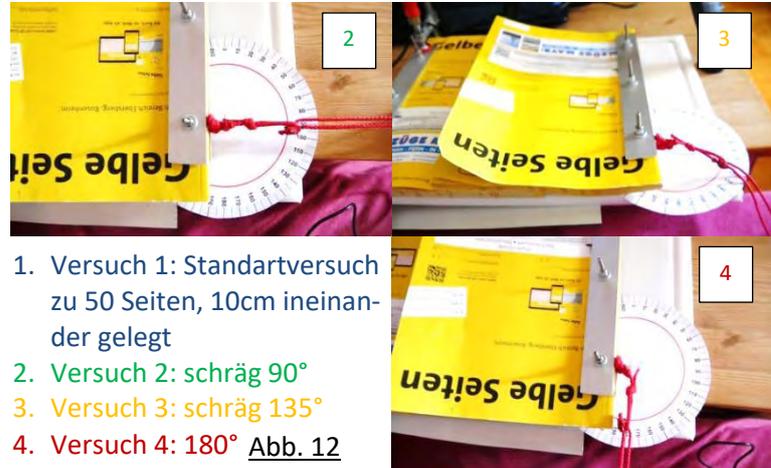
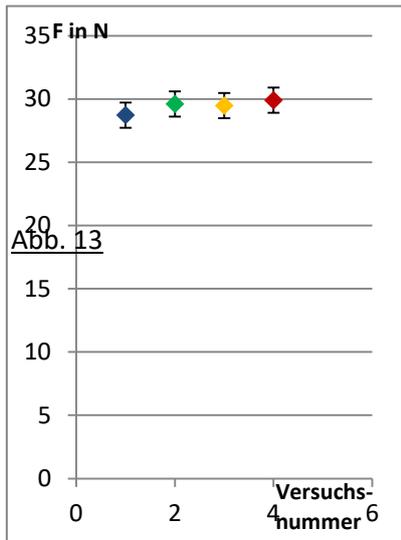


Abb. 10b

Zu beachten ist, dass der Punkt zum Versuch bei 100 15cm weit ineinandergelegten Seiten hat keinen Fehlerbalken hat. Das liegt daran, dass das gemessene bereits über dem vom Hersteller angegebenen messbaren Maximalwert liegt. Daher macht es keinen Sinn weitere Versuche zu machen, da nicht bestimmbar ist, was der tatsächliche Wert ist. Was deutlich zu sehen ist und Sinn ergibt ist, dass die niedrigsten Werte bei 5cm weit ineinandergelegt entstehen, die mittleren bei 10cm und die höchsten bei 15cm.

### 3.2.5 Schräg ziehen

Um unnötige Fehlerquellen zu eliminieren, wurde getestet, ob durch schräges Ziehen die gemessenen Werte verändert werden. So wurde das „Zugseil“ an der unteren Schraube befestigt und dann in verschiedene Richtungen gezogen (s. Abb. 12). Wie in Abb. 13 zu erkennen ist, macht die Zugrichtung an sich keinen Unterschied.



1. Versuch 1: Standardversuch zu 50 Seiten, 10cm ineinander gelegt
2. Versuch 2: schräg 90°
3. Versuch 3: schräg 135°
4. Versuch 4: 180°

Eine Problematik ergab sich allerdings: wenn man, wie in Abb. 12.4 oder noch steiler zieht, kann es passieren, dass das Buch in der Mitte knickt und somit die Messung unbrauchbar macht. Daher ist es sinnvoll wie in den vorherigen Versuchen zu ziehen, um derartige Problematiken zu vermeiden.

### 3.2.6 Schütteln



Abb. 14

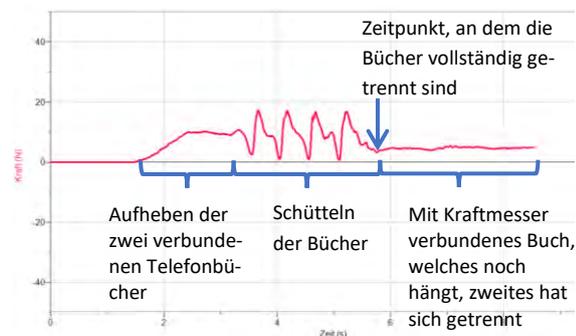


Abb. 15

Wenn man versucht Bücher zu trennen, die man alleine schon nicht mehr auseinander bekommt, dann ist das Schütteln äußerst nützlich. Durch die Schüttelbewegung gelangt Luft zwischen die Seiten und die Bücher werden Stück für Stück langsam getrennt, bis man sie entweder auseinander ziehen kann oder das untere von selbst aus dem oberen Buch rutscht. Abb. 15 zeigt wie das Buch bereits aufgefücherter ist und Abb. 16 zeigt eine beschriftete Kraftmessung eines Schüttelversuches. Dabei ist die zum Trennen benötigte Kraft, deutlich geringer als es beim Ziehen der Fall wäre.

### 3.2.7 Härtetest

Da es bereit nicht mehr möglich ist die Bücher selbst zu trennen, wenn alle Seiten 10cm weit ineinander gelegt sind, war der Gedanke es mit einem Test zu probieren, der die maximale Tragkraft der Bücher testen könne. Doch waren die Bücher deutlich schwerer zu trennen als erwartet. An den ineinandergelegten Telefonbüchern war am oberen mit Kabelbindern ein Seil befestigt und am Unteren eine Holzstange. So sieht man in Abb. 17 wie ich an zuerst alleine an den Büchern hänge, doch die Beiden hielten stand. Schließlich hing ich mich mit meinem Freund zusammen an die Bücher und sie hielten ebenfalls kurz, doch dann gingen sie scheinbar auseinander, doch war der Buchrücken des Oberen gerissen, wie in Abb. 18 abgebildet. Das dies passiert ist lag an der Methode, wie die Aluminiumleisten am Buch befestigt waren. Diese waren mit Schrauben und Muttern an gebohrten Löchern angeschraubt, wodurch eine Schwachstelle an den Büchern entstanden ist. Für die meisten Versuche ist diese Befestigung vollkommen ausreichend, da nicht besonders große Kräfte auf das Papier wirkten. Allerdings war das Gewicht von über 130kg zu viel für drei Stellen, an dem die Kabelbinder durch das Papier gingen.



Abb. 16



Abb. 17

### 3.2.8 Fazit

Mit diesen Versuchen dachte ich die meisten Fragen beantwortet zu haben, doch sind mir dann ein paar weitere Versuche eingefallen, die meinen Vermutungen zur Theorie entweder Rückhalt geben oder widersprechen könnten. Da allerdings die Bücher nach den Versuchen zu „3.2.7 Härtetest“ nicht mehr zu verwenden waren, beschloss ich weitere Versuchsreihen mit neuen Büchern zu starten.

### 3.3 Bücher Jahrgang 2017

Die neuen Bücher haben jedoch ein anderes Format als die von 2015. Daher sind die neuen Versuche von den Werten her unabhängig und anders, als die von den Alten. Das neue Buch ist schmaler und kürzer, wie in Abb. 19 zu sehen ist, hat aber statt ~250 Seiten, also 125 Blatt, ~300 Seiten, also 150 Blatt. Daher ist der Winkel größer, da der Abstand zwischen Überlappungsfläche und Buchrücken geringer ist.



Abb. 18

Bei den nachfolgenden Diagrammen sind aus Übersichtsgründen die Fehlerbalken nicht eingezeichnet, aber in den Erläuterungen werden sie berücksichtigt.

Es wurde auch getestet, ob es einen Unterschied mache, ob das linke oder rechte Buch oben liege, doch dabei zeigte sich kein Unterschied. Dennoch sind die neuen, wie auch die alten Versuche aus Gewohnheit und sicherheitshalber, falls es doch einen kleinen Unterschied mache, mit dem rechten Buch obenauf durchgeführt worden.

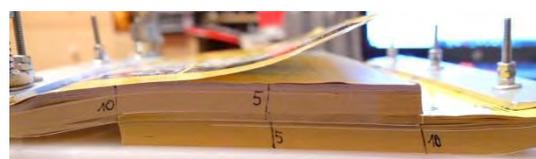


Abb. 19

### 3.3.1 Verkürzt

Zur besseren Veranschaulichung zeigt Abb. 19, was mit „verkürzt“ gemeint ist. Der vordere Teil des Buches wurde abgetrennt, wodurch die Distanz von der ineinandergelegten Fläche zum Buchrücken kürzer als am Normalen ist. Dadurch ist der Winkel  $\alpha$  größer und die maximale ineinanderlegbare Fläche beträgt 5cm.

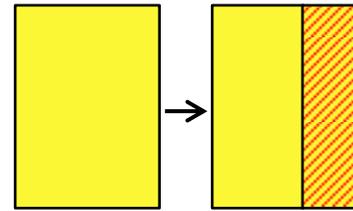


Abb. 20

Die Abbildungen 21 und 22 zeigen, wie sich die Bücher durch die Verkürzung verhalten. Im nachfolgenden Diagramm (Abb. 23) sind die Mittelwerte der Kräfte, die bei diesen und den Referenzversuchen gemessen wurden. Die Vergleichsversuche sind zwei Versuchsreihen mit dem normalen Buch, 5cm und 10cm weit, je 30, 50 bzw. 100 Seiten ineinander gelegt.

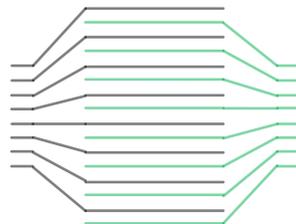


Abb. 21



Abb. 22

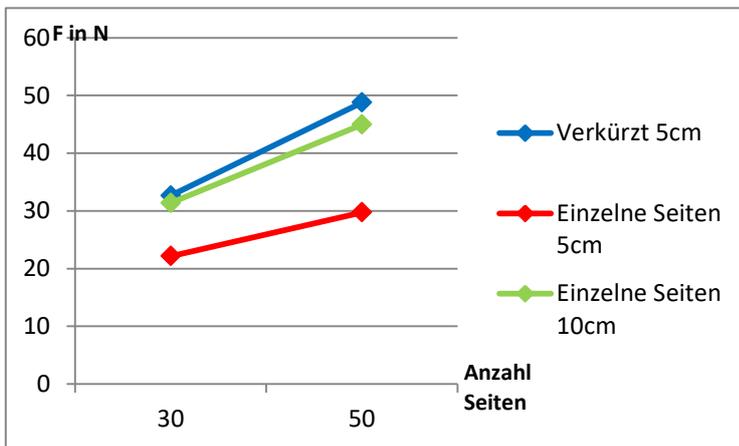


Abb. 23

Im Diagramm sieht man drei Versuchsreihen. Die Blaue gehört zu diesem Versuch und Rot und Grün zum Vergleichsversuch. Flächenmäßig stimmen die Versuche „blau“ und „rot“ überein, die Werte überschneiden sich aber nicht einmal, wenn man die Fehlerbalken betrachtet. Wertetechnisch betrachtet liegt „blau“ eher beim grünen Graphen, der sogar die doppelte ineinandergelegte Fläche hat. Er liegt sogar

drüber, doch wenn man die Fehlerbalken betrachtet ist das vernachlässigbar. Das bedeutet also, dass diesem Fall allein durch den größeren Winkel die Doppelte Fläche wettgemacht werden kann. Die Kräfte sind sogar so groß, dass im Gegensatz zu den nachfolgenden Versuchen keine hier eingetragene Messreihe zu „100 Seiten 5cm ineinandergelegt“ durchgeführt wurde, da die Messungen über dem maximalen messbaren Wert des Kraftmessers lagen.

### 3.3.2 Halbiert

Durch das Halbieren, wie in Abb. 24 und 25 gezeigt, ändert sich der Winkel  $\alpha$  nicht, aber die ineinandergelegte Fläche wird halbiert.

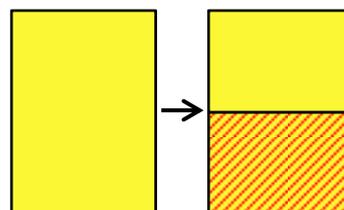


Abb. 24

Dabei müsste sich die laut Überlegung die messbare Kraft im Vergleich zur Referenzmessung halbieren. Wenn man nun im Diagramm den blauen und roten Graphen betrachtet



Abb. 25

stimmt das auch ganz gut überein. Auch wenn der letzte Punkt nicht ganz zu passen scheint, so ist der

Fehlerbalken zur Versuchsreihe „Halbiert 5cm, 100 Seiten“ recht groß, wodurch auch dieser Wert zum Halbierten passt.

Wenn man jetzt den Grünen und Lilanen vergleicht scheint da etwas nicht ganz zu passen. Zum einen fehlt der Punkt zum 100 Seitenversuch beim Grünen. Das liegt daran, dass dabei mehrfach der Maximalwert des Kraftmessers erreicht, bzw. überschritten wurde, weshalb es keinen Sinn

hat einen Punkt einzutragen, der nicht wirklich bestimmbar ist und deutlich größer sein wird, als „gemessen“. Wenn man von der Verdopplungsaussage ausgeht, müsste sich der Punkt irgendwo um 110N befinden, was dem Kraftmesser definitiv nicht mehr möglich ist zu messen. Zum anderen ist der zweite grüne Mittelwert recht nah am Lilanen. Wenn man nun den Fehlerbalken des grünen Punktes betrachtet erkennt man, dass man recht nah an den Grenzen des Messgerätes ist, auch wenn diese noch nicht eindeutig überschritten sind. Obwohl im Mittelwert also der Punkt recht weit unten ist, so gibt es mehrere Ergebnisse, bei denen deutlich mehr Kraft gemessen wurde. Dementsprechend kann man also sagen, dass auch für diese beiden Graphen die Theorie zur Verdopplung bestätigt ist.

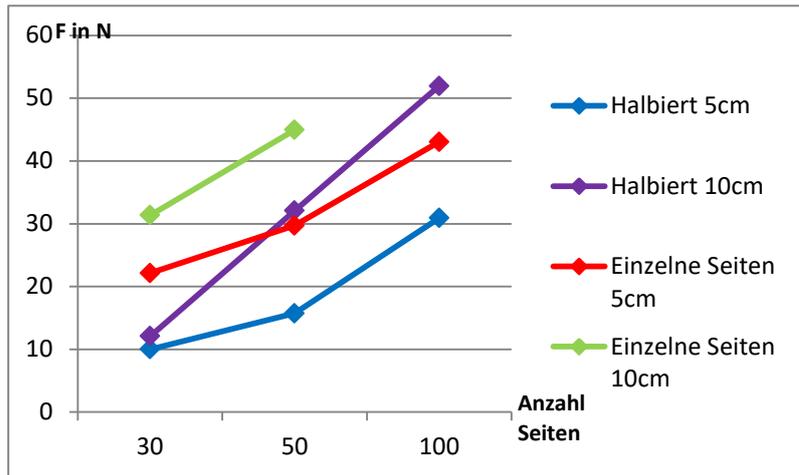


Abb. 26

### 3.3.3 Jede 2. Seite herausgetrennt

Der Winkel  $\alpha$  ist, dadurch, dass jede zweite Seite herausgetrennt ist, annähernd null, wie es in nebenstehender Skizze dargestellt ist (Abb. 27). In der Photographie (Abb. 28) sieht man, dass das Buch nun nur noch die Hälfte der Dicke von vor dem Heraustrennen jeder zweiten Seiten hat.



Abb. 27

Da der Winkel  $\alpha$  näherungsweise null ist, sind die gemessenen Werte, wie in im nebenstehenden Diagramm zu sehen ist, deutlich geringer.

Beide Versuchsreihen, also der blaue und lilane Graph, sind beide zum großen Teil unter den Referenzversuchen und haben auch keine auffälligen Fehlerbalken.



Abb. 28

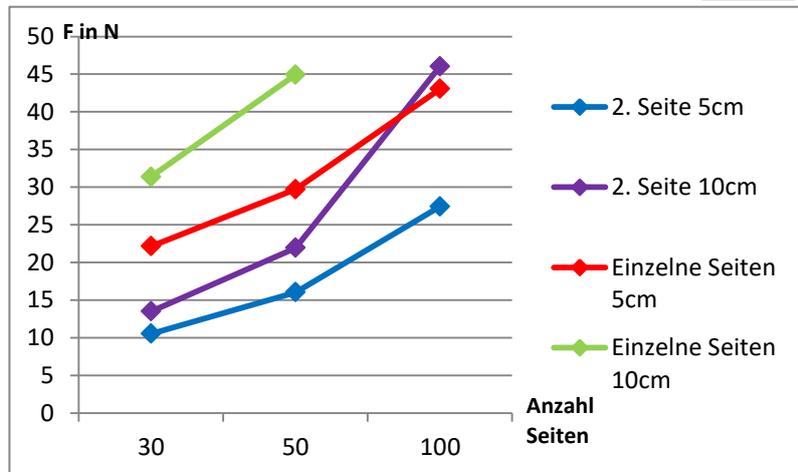


Abb. 29

### 3.3.4 Fazit

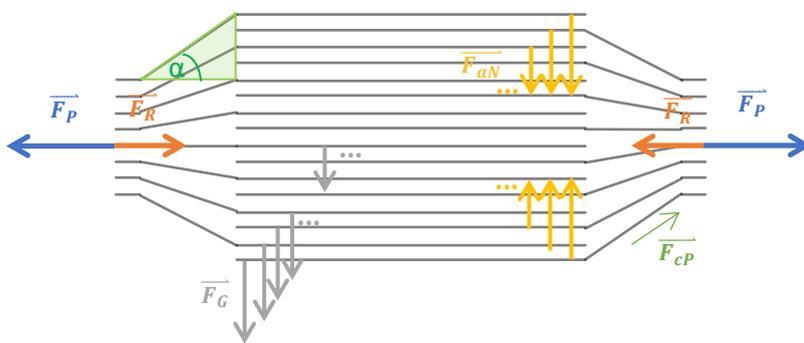
Es wurde alles, was mit den zur Verfügung stehenden Mitteln mit Telefonbüchern möglich war aus-zuprobieren, auch getestet. Daher sind die Versuche soweit zufriedenstellend. Die Vermutungen, in Sicht auf die Theorie, wurden hervorragend bestätigt.

Nun sind keine Zweifel mehr übrig, dass der Winkel eine wichtige Rolle in der Entstehung der Kraft spielt.

## 4.Theorie:

### 4.1 Grundsätzliche Erklärungen

Vereinfacht bestehen die Versuche daraus, dass man die Seiten des einen Buches zwischen die des anderen legt, wie es in der Skizze veranschaulicht ist:



Symbolerklärung:

- $\overrightarrow{F_P}$  Kraft, mit der an den Büchern gezogen wird (gleich auf beiden Seiten, da eine befestigt ist)
- $\overrightarrow{F_R}$  Resultierende Kraft, die die Bücher zusammen hält
- $\overrightarrow{F_G}$  Gewichtskraft
- $\overrightarrow{F_{cP}}$  Teilkraft von  $\overrightarrow{F_P}$ , die an jeder einzelnen Seite zieht
- $\overrightarrow{F_{aN}}$  Zusätzliche Normalkraft, die durch den Buchrücken auf die Seiten wirkt
- $\nearrow$  Kraft und ihre Richtung
- $\alpha$  Winkel um den die Seite nach oben geknickt ist

Abb. 30

Durch Ziehen am Buchrücken auf einer Seite, da eine Seite am Untergrund festgemacht ist, ist der Betrag der Kraft auf beiden Seiten gleich, entsteht die Kraft  $\vec{F}_{aN}$ , die in Richtung der Buchmitte gerichtet ist. Diese entsteht aus der Teilkraft  $\vec{F}_{cP}$ , die auf jede Seite einzeln wirkt. Da  $\vec{F}_{cP}$  eine schräge Richtung hat, kann man sie in die waagrechte Richtung,  $F_p$ , und eine senkrechte,  $\vec{F}_{aN}$ , aufteilen.  $\vec{F}_{aN}$  ist entweder nach oben oder nach unten gerichtet, abhängig davon in welche Richtung die Seite gebogen ist, zeigt aber immer in die Buchmitte.

Der Winkel  $\alpha$  ist eine theoretische Annäherung an den tatsächlichen Winkel. Er kommt dem tatsächlichen Ergebnis sehr nahe, wird aber keine perfekte Repräsentation darstellen, da durch Ungenauigkeiten beim Zusammenlegen einige Seiten etwas weniger weit im Buch liegen, als andere. Bei den meisten Seiten wird dies durch das Ziehen ausgeglichen, doch wenn die Seiten durch  $\vec{F}_{aN}$  zusammengepresst sind, können einige nicht die volle Zugkraft abbekommen und steuern weniger zu  $\vec{F}_{aN}$  bei.

Nachfolgende Abbildung 31 ist eine Tabelle zur Erläuterung der Formelsymbole und deren jeweilige Einheit.

Beschreibung	Symbol	Einheit
Länge der Überlappungsfläche	$l$	cm
Breite der Überlappungsfläche	$b$	cm
Flächenbezogene Masse	$q$	$\frac{g}{cm^2}$
Erdbeschleunigung	$g$	$\frac{m}{s^2}$
Haftreibungskoeffizient	$\mu$	
Anzahl der Zwischenräume	$n$	
Anzahl der Seiten pro Bündel	$\theta$	
Anzahl der Seiten über der Überlappungsfläche	$n_d$	
Dicke einer Seite	$d$	mm
Abstand vom Buchrücken zur ÜF	$f$	mm

Abb. 31

## 4.2 Formel

### 4.2.1 Herleitung

#### 4.2.1.1 Grundidee

Skizze zur Reibungskraft:

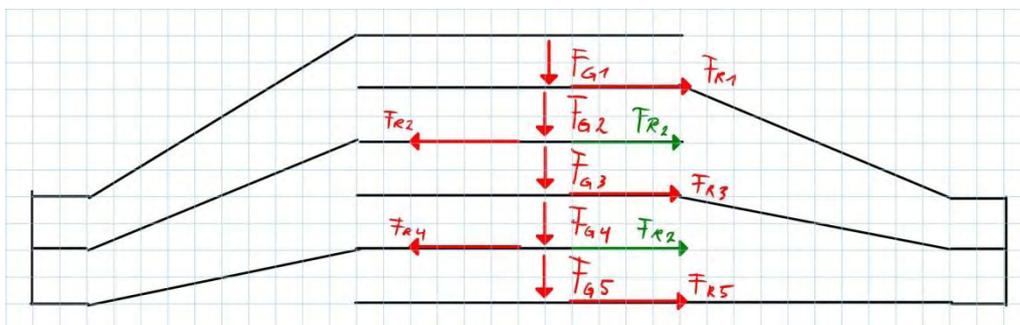


Abb. 32

$$(1) F_R = F_N \cdot \mu$$

Skizze zur Kompressionskraft:

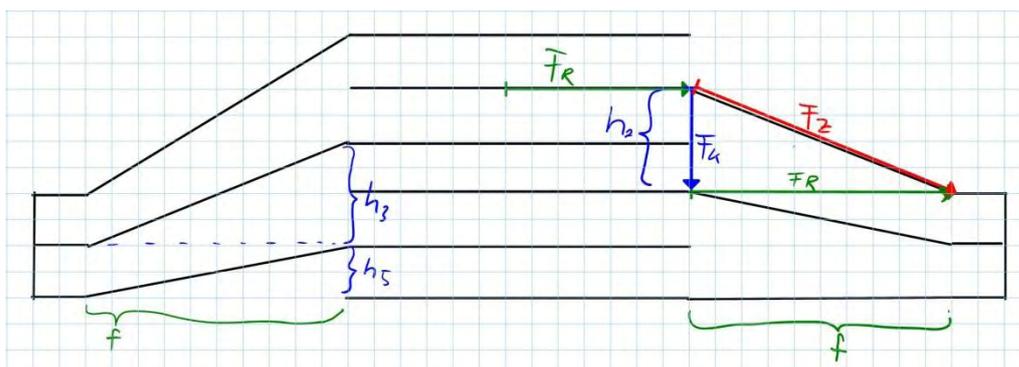


Abb. 33

$$(2) \quad \frac{F_K}{F_R} = \frac{h}{f} \rightarrow F_K = F_R \cdot \frac{h}{f}$$

#### 4.2.1.2 Mathematische Beschreibung

a) Reibungskraft:

$$(3) \quad F_R = (F_G + F_K) \cdot \mu$$

Setzt man  $\vec{F}_K$  aus Gleichung (2) ein erhält man folgenden Ausdruck:

$$(4) \quad F_R = \left( F_G + F_R \cdot \frac{h}{f} \right) \cdot \mu$$

Diesen kann man wiederum nach  $\vec{F}_R$  auflösen:

$$(5) \quad F_R = F_G \cdot \mu + F_R \cdot \frac{h}{f} \cdot \mu$$

$$(6) \quad F_R - F_R \cdot \frac{h\mu}{f} = F_G \cdot \mu$$

$$(7) \quad F_R \cdot \left( 1 - \frac{h\mu}{f} \right) = F_G \cdot \mu$$

$$(8) \quad F_R = \frac{F_G \cdot \mu}{\left( 1 - \frac{h\mu}{f} \right)}$$

b) Zugkraft:

Die Zugkraft  $\vec{F}_Z$  kann man das mittels Kosinus aus  $\vec{F}_R$  berechnen.

$$(9) \quad F_Z = \frac{F_R}{\cos(\alpha)}$$

Die Kraft  $\vec{F}_R$  bekommt man aus Gleichung (8) und den Winkel  $\alpha$  kann man sich aus den geometrischen Größen  $h$  und  $f$  berechnen.

$$(10) \quad \alpha = \arctan\left(\frac{h}{f}\right)$$

Setzt man  $\alpha$ , Gl. (10), und  $\vec{F}_R$ , Gl. (8), in Gleichung (9) ein, erhält man als Zugkraft für eine Seite:

$$(11) \quad F_Z = \frac{\frac{F_G \cdot \mu}{\left( 1 - \frac{h\mu}{f} \right)}}{\cos\left(\arctan\left(\frac{h}{f}\right)\right)} = \frac{F_G \cdot \mu}{\left( 1 - \frac{h\mu}{f} \right) \cdot \cos\left(\arctan\left(\frac{h}{f}\right)\right)}$$

Die Größen  $\vec{F}_G$  und  $h$  sind dabei abhängig von der aktuell berechneten Seite. Sieht man in einer Formelsammlung nach, findet man:

$$(12) \quad \cos(\arctan(\alpha)) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

Nutzt man dies in Gleichung (11) erhält man:

$$(13) \quad F_Z = \frac{F_G \cdot \mu}{\left( 1 - \frac{h\mu}{f} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{h}{f}\right)^2}}} = \frac{F_G \cdot \mu \cdot \sqrt{1+\left(\frac{h}{f}\right)^2}}{\left( 1 - \frac{h\mu}{f} \right)}$$

c) Gewichtskraft

$$(14) \quad F_G = (n + n_d) \cdot m \cdot g = (n + n_d) \cdot (l \cdot b \cdot \rho) \cdot g$$

Damit man das Ergebnis in Newton bekommt muss man für  $m = (l \cdot b \cdot \rho)$  noch einen Korrekturfaktor hinzufügen:

$$cm \cdot cm \cdot \frac{g}{cm^2} = \frac{1}{1000} \cdot kg$$

Somit ergibt sich:

$$(15) F_G = (n + n_d) \frac{(l \cdot b \cdot \rho)}{1000} \cdot g$$

d) Höhenunterschied

Skizze zum Höhenunterschied:

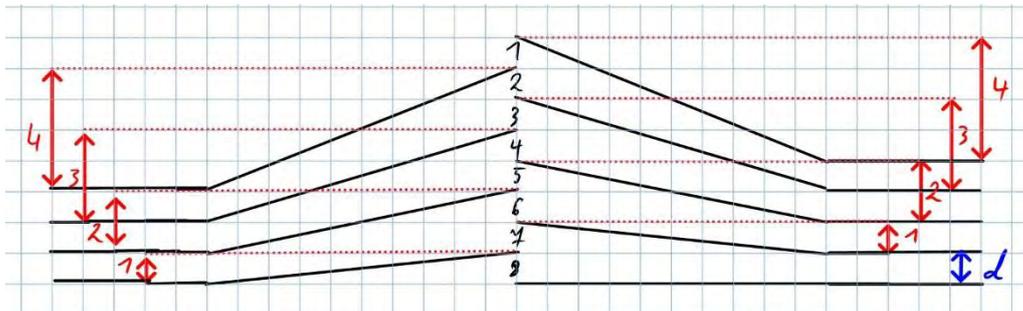


Abb. 34

Die eigentliche Reihenfolge zur Berechnung des Beispiels müsste lauten:

4; 4; 3; 3; 2; 2; 1; 1

Zur Vereinfachung der Rechnung wird im Folgenden aber Diese verwendet:

4; 3,5; 3; 2,5; 2; 1,5; 1; 0,5

Der dadurch entstehende Fehler hat sich erst bei den Testrechnungen erst in der vierten oder fünften gültigen Ziffer gezeigt und ist somit für den Anfang zu vernachlässigen und ist bei Weiten unter der Messgenauigkeit der Versuche.

$$(16) h = \frac{n+1-i}{2} \cdot d$$

e) Gesamtkraft

Um die Kraft zu bestimmen die nötig ist um die Bücher zu trennen muss man alle einzelnen Zugkräfte  $\vec{F}_Z$  von  $i = 1$  bis zur letzten Seite  $n$  aufsummieren.

$$(17) F_{ges} = \sum_{i=1}^n F_{Zi}$$

Aus Gleichung (13) lässt sich schreiben:

$$(18) F_{ges} = \sum_{i=1}^n \frac{F_{Gi} \cdot \mu \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h_i}{f}\right)^2}}{\left(1 - \frac{h_i \mu}{f}\right)}$$

Mit  $\vec{F}_G$  aus (15), wobei  $n$  jetzt durch  $i$  ersetzt wird, ergibt sich:

$$(19) F_{ges} = \sum_{i=1}^n (i + n_d) \frac{(l \cdot b \cdot \rho)}{1000} \cdot g \cdot \frac{\mu \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h_i}{f}\right)^2}}{\left(1 - \frac{h_i \mu}{f}\right)}$$

$$(20) F_{ges} = \frac{(l \cdot b \cdot \varrho)}{1000} \cdot g \cdot \mu \cdot \sum_{i=1}^n (i + n_d) \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{h_i}{f}\right)^2}{\left(1 - \frac{h_i \mu}{f}\right)}}$$

Als letztes wird noch  $h_i$  mit dem Ausdruck aus Gl. (16) ersetzt:

$$(21) F_{ges} = \frac{(l \cdot b \cdot \varrho)}{1000} \cdot g \cdot \mu \cdot \sum_{i=1}^n (i + n_d) \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{n+1-i}{2} \cdot \frac{d}{f}\right)^2}{\left(1 - \frac{n+1-i}{2} \cdot \frac{d \cdot \mu}{f}\right)}}$$

Betrachtet man jetzt noch, dass nicht nur einzelne Seiten übereinandergelegt werden, sondern Bündel von Seiten muss noch eine weitere Variable eingeführt werden. Das führt schließlich zu dieser Formel, die soweit alle betrachteten Einflussgrößen enthält:

$$(22) F_{ges} = \frac{(l \cdot b \cdot \varrho)}{1000} \cdot g \cdot \mu \cdot \sum_{i=1}^n (i + n_d) \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{n+1-i}{2} \cdot \frac{d \cdot \theta}{f}\right)^2}{\left(1 - \frac{n+1-i}{2} \cdot \frac{d \cdot \theta \cdot \mu}{f}\right)}}$$

#### 4.2.2 Einschränkung

Da der Nenner negativ werden kann, gilt es folgendes zu beachten. Bei  $i = 1$  ist der hintere Teil der Formel am größten. Deshalb sollte dann immer noch gelten:

$$(23) \left(1 - \frac{n}{2} \cdot \frac{d \cdot \theta \cdot \mu}{f}\right) > 0$$

$$(24) \frac{n}{2} \cdot \frac{d \cdot \theta \cdot \mu}{f} < 1$$

$$(25) \frac{n}{2} \cdot d \cdot \theta \cdot \mu < f$$

Mittels Gleichung (25) kann man sich z.B. errechnen, wie viel Abstand man benötigt damit man die Gleichung verwenden kann. Löst man den selbigen Ausdruck nach anderen Variablen auf, kann man sich auch andere Größen berechnen.

#### 4.3 Berechnungen und Graphen

Für die Berechnungen wurden folgende Konstanten verwendet, die bei jeder Rechnung gleich bleiben:

Beschreibung	Symbol	Einheit
Flächenbezogene Masse	$\varrho$	$0,004 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$
Erdbeschleunigung	$g$	$9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Haftreibungskoeffizient	$\mu$	$0,73^{(3)}$
Dicke einer Seite	$d$	$0,07\text{mm}$

Abb. 35

<sup>3</sup> Wert aus: The enigma of the two interleaved phonebooks  
<https://arxiv.org/pdf/1508.03290v1.pdf>

Durch die hohe Belastung der Seiten kann es passieren, dass irgendwann ein Punkt erreicht ist, an dem die Seiten reißen. Da es keinen zuverlässigen Wert für die Reißlänge von Telefonbuchpapier gibt, wurde der ungefähre Mittelwert für die Querrichtung bei Schreibpapier angegeben<sup>4</sup> war genommen. Aus dieser wurde über Zugfestigkeit die Maximale Tragkraft einer Seite berechnet. Um daraus dann die Maximale für ein Buch zu erhalten wird die Kraft einer Seite mit der Anzahl der Seiten multipliziert. Eine Seite kann somit ca. 2,64kg halten, bis sie reißt. Bei 250 Seiten wären das schon 660kg und bei 5,28t. Da bei den regionalen Büchern keine Zugkräfte erreicht werden, die an 600kg heranreichen, wird dies für diese Graphen auch vernachlässigt.

In folgendem Graphen (Abb. 37) sieht man einen möglichen Graphen, wenn man Telefonbücher aus LA, USA, nimmt, die ca. 2000 Seiten und eine Fläche von ungefähr 600cm<sup>2</sup> (20cm x 30cm) pro Seite haben.

Beschreibung	Symbol	Einheit
Länge der Überlappungsfläche	$l$	30cm
Breite der Überlappungsfläche	$b$	20cm
Anzahl der Zwischenräume	$n$	2000
Anzahl der Seiten pro Bündel	$\theta$	1
Anzahl der Seiten über der Überlappungsfläche	$n_d$	0
Abstand vom Buchrücken zur ÜF	$f$	70mm

Abb. 36

Wie zu sehen ist, können diese Bücher problemlos einen normalen PKW heben, wie auch immer wieder im Fernsehen, z.B. bei den Mythbusters<sup>5</sup>, zu sehen ist.

Bei der roten Linie handelt es sich um eine Ideallinie. Wenn die Bücher gut zusammengelegt sind und keine Seite in irgendeiner Form schwächer ist oder mehr belastet wird. Das bedeutet, dass es z.B. wie in „3.2.7 Härtetest“ bereits früher gerissen ist, als es hätte müssen, da die Aufhängung nicht ideal ist.

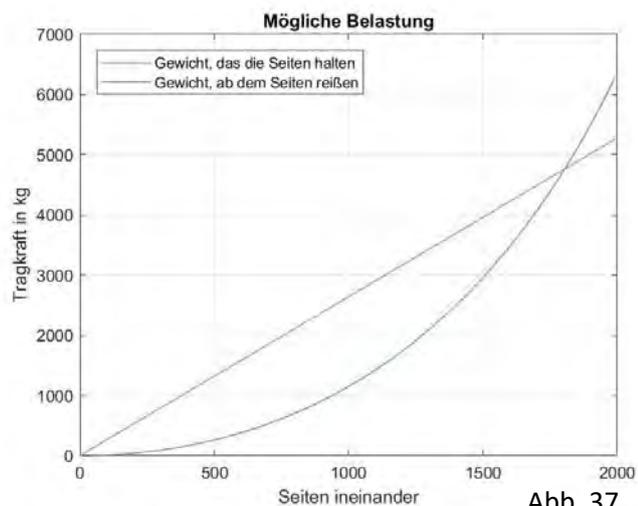


Abb. 37

#### 4.4 Vergleich Theorie und Praxis

Für die neuen Bücher ergeben sich folgende Werte.

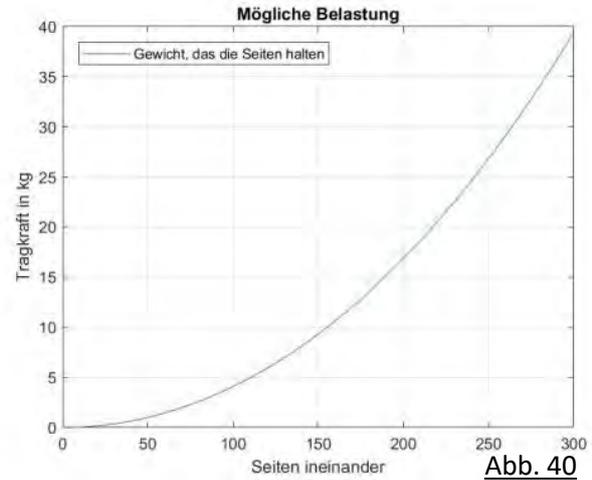
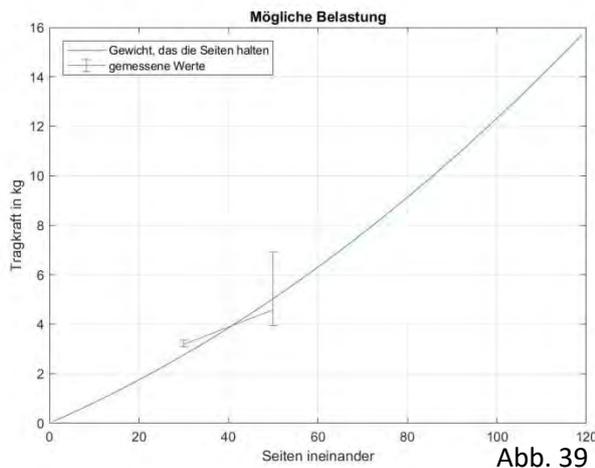
Aus diesen ergibt sich folgender Graph:

Beschreibung	Symbol	Einheit
Länge der Überlappungsfläche	$l$	10cm
Breite der Überlappungsfläche	$b$	26,9cm
Anzahl der Zwischenräume	$n$	120
Anzahl der Seiten pro Bündel	$\theta$	1
Anzahl der Seiten über der Überlappungsfläche	$n_d$	90
Abstand vom Buchrücken zur ÜF	$f$	30mm

Abb. 38

<sup>4</sup> Prof. Dr.-Ing. R. Korn, Dr.-Ing F. Burgstaller: Handbuch der Werkstoffprüfung, Springer-Verlag, S 138  
<sup>5</sup> Discovery Channel, Mythbusters, Phone Book Friction, San Francisco, USA, 16.04.2015  
<https://www.dailymotion.com/video/x2mpjll>

Man kann sieht, dass beide gemessenen Mittelwerte zur errechneten Kurve passen. Außerdem bestätigt sich jetzt die in „3.3.2 Halbiert“ vermutete Überlegung zum Wert von 100 Seiten 10cm weit ineinander gelegt. Wie man aus dem Graphen herauslesen kann, beträgt der Wert hier ca. 120N. Für das gesamte Buch 10cm weit ineinandergelegt ergibt sich ein Wert von 39,1kg.



## 5. Literaturverzeichnis

Website GYPT

<https://www.gypt.org/>

Dual-Range Force Sensor von Vernier order code: DFS-BTA

Logger Lite <http://logger-lite.software.informer.com/1.5/>

The enigma of the two interleaved phonebooks

<https://arxiv.org/pdf/1508.03290v1.pdf>

Prof. Dr.-Ing. R. Korn, Dr.-Ing F. Burgstaller: Handbuch der Werkstoffprüfung, Springer-Verlag, S 138

Discovery Channel, Mythbusters, Phone Book Friction, San Francisco, USA, 16.04.2015

<https://www.dailymotion.com/video/x2mpjll>

Science Buddies

[https://www.sciencebuddies.org/science-fair-projects/project-ideas/Phys\\_p103/physics/can-you-lift-a-car-with-two-phone-books#background](https://www.sciencebuddies.org/science-fair-projects/project-ideas/Phys_p103/physics/can-you-lift-a-car-with-two-phone-books#background)

Sämtliche Photographien sind von mir erstellt und bearbeitet worden.

Die Diagramme habe ich selbständig mit Hilfe von Microsoft Excel 2010 und MatLab erstellt.

Bilder der Graphen sind Screenshots von meinem Laptop von der Software Logger Lite.