

Inhaltsverzeichnis

I.	Pi und die Welt.....	1
II.	Die Kreiszahl π	3
1.	Die Geschichte der Bestimmung der Kreiszahl Pi	3
1.1.	π Verhältnis am Kreis	3
1.2.	Die Polygon Methode des Archimedes	4
1.3.	Die Anfänge der Berechnung von Pi mit Hilfe der Analysis	8
1.4.	Die Berechnung der Kreiszahl in der Zeit der Computer.....	9
2.	Die eigene Berechnung der Kreiszahl.....	10
2.1.	Geometrie – Archimedes	10
2.2.	Analysis – Leibniz-Reihe	13
2.3.	Stochastik – Monte-Carlo-Simulation	14
2.4.	Vergleich der Berechnungsmethoden	15
III.	Pi und das Universum?!	18
IV.	Erklärung zur selbstständigen Anfertigung der Seminararbeit	19
V.	Literaturverzeichnis.....	21
VI.	Abbildungsverzeichnis	22
VII.	Tabellenverzeichnis.....	22

I. Pi und die Welt

Pi ist wohl die faszinierendste Zahl, die wir kennen. Es fängt dabei an, dass eigentlich jeder die ersten Ziffern dieser Zahl kennt, denn wenn man zufällig Bekannten die Frage stellt: „Welchen Wert hat Pi?“, so können sie einem meistens die ersten drei Stellen 3,14 oder vielleicht mal doch 4, 9 oder 31 Stellen nennen. Aber es gibt auch „Chao Lu, der 2005 [...] 67 890 Stellen von Pi aus dem Gedächtnis auf [sagte]“ und damit den Weltrekord aufstellte, am 21. Oktober 2015 löste ihn aber Suresh Kumar mit 70 030 aufgesagten Nachkommastellen ab.^{1 2} Dagegen klingen dann die 3 oder 31 genannten Stellen im Vergleich mehr als lächerlich. Aber wenn man beachtet, wie viele Stellen heutzutage von Computern mit einer unvorstellbaren Rechenleistung berechnet wurden, ist auch das verhältnismäßig wenig. So passt die auswendig gelernte Anzahl an Stellen (70 030) sogar mehr als 320 000 000 mal in die ca. 22,4 Billionen Stellen des mit einem Computer im Jahr 2016 berechneten Weltrekords. Dadurch erkennt man den enormen Unterschied.

Man möchte meinen, dass wir die wohl meist erforschte Zahl der Welt inzwischen gut kennen, dem ist tatsächlich nicht so, denn wir kennen nur die ersten 22 459 157 718 361 Nachkommastellen von Pi.³ Was wir aber von der Zahl Pi sicher wissen, ist, dass sie eine irrationale Zahl ist, die sicher unendlich viele Nachkommastellen hat, damit müssen wir feststellen, dass wir mehr Stellen nicht kennen, als wir kennen.⁴

Pi fasziniert schon seit langem viele Menschen und so wurde neben ernsthafter wissenschaftlicher Forschung sogar der Zahl ein eigener Tag, der 14. März, als „Pi Day“ gewidmet. Die Wahl ist kein Zufall, denn wenn das Datum numerisch geschrieben wird, erhalten wir den 14.3. und anschließend in amerikanischer Schreibweise, also Monat vor Tag, wiedergibt, dann lautet das Datum dann 3.14., der Wert für Pi, den wohl jeder kennt!

¹ (Hess 2016, S.65)

² (vgl. <https://3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592.eu/rekorde-im-pi-auswendig-aufsagen/>)

³ (vgl. <https://3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592.eu/pi-wissen/pi-nachkommastellen-rekorde/>)

⁴ (ebd.)

Nach all dem stelle ich mir die Frage, weshalb so ein enormer Aufwand um diese eine von unendlich vielen Zahlen betrieben wird. Ein Grund könnte sein, dass Pi in fast allen Bereichen der Mathematik zu finden ist. Beginnend bei Kreisen, womit vermutlich jeder Pi in Verbindung bringt, weiter über Schwingungen, Wellen und sogar für die Berechnung von elektrischen Kräften, aber auch in Anwendungen, die nicht sofort mit Pi assoziiert werden.

So möchte ich diese Arbeit dieser faszinierenden Zahl widmen. Zunächst werde ich auf die Geschichte der Bestimmung der Kreiszahl Pi eingehen, indem ich mit den am weitesten zurück liegenden Ansätzen beginne und mit der Zeit mitgehend dann über die Antike, das Mittelalter und die frühe Neuzeit zum heutigen Tag gelangen werde. In Zuge dessen beschreibe ich die Fortschrittlichkeit einer für diese Zeit eventuell neuen Methode und nenne dabei auch meist die Hintergrunddaten dieser Personen.

Im weiteren Teil werde ich mich dann selbst an der Berechnung der Kreiszahl versuchen. Dabei bediene ich mich bekannten Erkenntnissen, die sowohl aus jüngeren, als auch älteren Zeiten stammen. Um mein Vorhaben zu erleichtern, bediene ich mich, wie auch jeder andere vor mir, der eine Annäherung für Pi berechnen wollte, an den Möglichkeiten meiner Zeit. Indem ich in dem Programm IntelliJ IDEA in Java die bekannten Berechnungsmethoden selbst implementiere, vermeide ich Fehler und mindere die sonstige Dauer der händischen Berechnung stark. Dabei möchte ich nicht nur eine reine Berechnung vollziehen, sondern ebenfalls auf die Ergebnisse wie beispielsweise die Annäherungsgeschwindigkeit eingehen.

II. Die Kreiszahl π

1. Die Geschichte der Bestimmung der Kreiszahl Pi

1.1. π Verhältnis am Kreis

Wie bereits erwähnt hat Pi eine hohe Relevanz in der Mathematik und es ist nicht erst heute so, dass diese Zahl unabdingbar für manche Berechnungen ist. Man erkannte schon sehr früh, dass das Verhältnis von Kreisumfang U und Durchmesser d konstant ist.

$$\frac{U}{d} = x$$

Den Proportionalitätsfaktor bezeichnet man mit dem griechischen Buchstaben π , so dass gilt

$$\frac{U}{d} = \pi.$$

⁵ So begann das Mysterium um Pi. Schon in der Bibel erhalten wir indirekt einen Wert für Pi. In dem Buch 1. Könige 7, 23 ist wie folgt die Rede: „[...] von einem Rand zum anderen zehn Ellen weit [...] und eine Schnur von dreißig Ellen war das Maß ringsherum.“⁶ Für Pi ergibt sich daraus der Wert $\pi = 3$. Im alten Ägypten war allerdings schon vorher ein genauere Wert für Pi auf einer Papyrus-schriftrolle indirekt angegeben. Denn „nach dem ägyptischen Schreiber Ahmes, Autor des Rhind-Papyrus, ist ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 8 im Hinblick auf die Fläche äquivalent zu einem Kreis mit einem Durchmesser d von 9.“ Daraus ergibt sich folgende Berechnung:

$$\begin{aligned} 8^2 &= A = \pi \left(\frac{9}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow 64 &= \pi * 20,25 \\ \Rightarrow \pi &= \frac{64}{20,25} \approx 3,16049383 \end{aligned}$$

Damit erhält man einen Wert für Pi, der nun auf zwei Stellen genau dem heute bekannten Wert entspricht.⁷

⁵ (vgl. <https://3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592.eu/die-geschichte-der-zahl-pi/>)

⁶ (Die Bibel, 1. Könige 7, 23 2007, S.350)

⁷ (vgl. Navarro, Das Geheimnis von π - Verhältnisse in der Mathematik 2016, S.19)

Neben den indirekten Angaben der Kreiszahl gab es in den frühen Jahren auch direkte wie „auf einer Tafel in der Alten Stadt Susa aus der Zeit um 2000 v.Chr.“, auf der der Bruch $\frac{25}{8}$ angegeben war.⁸ Diese Angabe mit 3,125 ist nun wesentlich genauer als die eben erwähnten. In der indischen Astronomie im 9. Jhd. v.Chr. kommt ein Wert von $\frac{339}{108} = 3,13\bar{8}$ für Pi zum Einsatz, welcher noch mal zwei Nachkommastellen des heutigen Werts liefert.⁹

1.2. Die Polygon Methode des Archimedes

Die heute wohl bekannteste Methode zur Berechnung stammt aus dem alten Griechenland um das Jahr 250 v.Chr. von dem Mathematiker, Ingenieur und Physiker Archimedes von Syrakus. Er berechnete π mit Hilfe von gleichmäßigen Polygonen (n-Ecken), wobei er für den Wert der unteren Grenze anfangs ein Sechseck in und für die obere Grenze ein solches um einen Kreis gelegt hat (vgl. Abbildung 1).

Anschließend hat er die beiden Polygone inner- und außerhalb des Kreises jeweils verdoppelt, um den Umfang der n-Ecke immer näher an den des Kreises anzunähern. Darauf gehe ich im späteren Verlauf genauer ein. Da sich die Polygone immer näher von beiden Seiten an den Kreis anschmiegen, folgt

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n\text{-Eck}} = U_{\text{Kreis}}.^{10\ 11}$$

Da diese Grenzwertbetrachtung zu damaliger Zeit noch nicht bekannt war, wendete er die oben beschriebene Methode für ein Polygon mit 96 Ecken an.¹² Sie stellt die erste überlieferte schriftliche Herleitung für die Kreiszahl dar und liefert das für diese Zeit sehr genaue Ergebnis

$$3,140845 \approx \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \approx 3,142857.$$

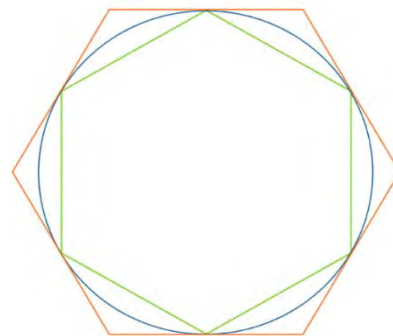


Abbildung 1 Anfangspolygon von Archimedes (Eigene Darstellung)

⁸ (Navarro 2016, S.20)

⁹ (vgl. Navarro 2016, S.20)

¹⁰ (vgl. Schuppar und Humenberger, Elementare Numerik für die Sekundarstufe 2015, S.198)

¹¹ (vgl. <https://www.zeit.de/zeit-wissen/2016/02/pi-tag-mathematik-pi-kreiszahl>)

¹² (vgl. Navarro 2016, S.21, 24)

So geht aus dieser Angabe eine tatsächliche Genauigkeit von 2 Nachkommastellen hervor.¹³

¹³ (vgl. <https://3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592.eu/die-geschichte-der-zahl-pi/>)

Die gleiche Methode benutzte auch der ägyptische Astronom, Astrologe und Geograph Ptolemäus. Dieser berechnete so im 2. Jhd. n.Chr. die Kreiszahl mit Hilfe eines 120-Ecks auf eine Stelle genauer als Archimedes. Er gab für Pi den Bruch

$$\pi \cong \frac{377}{120} \cong 3,141\bar{6}$$

an.¹⁴ In China hingegen wird nun im 3. Jhd. n.Chr. auch die Methode von Archimedes angewandt, wodurch Lui Hui in den so genannten „Neun Kapiteln über die Mathematik“ den von Zhang Heng angegebenen Wert von $\pi = \sqrt{10} \approx 3,162$ mit Hilfe eines 192-Ecks auf die Zahl 3,14 korrigiert.¹⁵ Später erweiterte er das Polygon auf ein 3072-Eck und kam so auf das Ergebnis $\pi \cong 3,141592104$ und konnte folglich sechs korrekte Nachkommastellen angeben.¹⁶ Nach all diesem Fortschritt in der Bestimmung von Pi kommt im 7. Jhd. n.Chr. ein gewisser Rückschlag, da der wohl sehr begabte indische Mathematiker Barhmagupta in einer langen von ihm verfassten Schrift wieder auf die inzwischen sehr ungenaue Angabe für $\pi = \sqrt{10}$ zurückgreift.¹⁷

In der Mathematik des islamischen Mittelalters tritt Al-Kashi mit der Berechnung von π mit einer Genauigkeit von 16 Nachkommastellen im 15. Jhd. n.Chr. hervor. Er, als der letzte bedeutende Mathematiker in dieser Zeit im muslimischen Reich, brachte dies durch ein $3 \cdot 2^{28}$ -Eck.¹⁸ Selbst 18 Jahrhunderte nach Archimedes benutzten Mathematiker immer noch seine Methode, um eine Annäherung für Pi zu finden. So nutzte auch Ludolph van Ceulen um 1600 n.Chr. diese für die Approximation an die Kreiszahl und berechnete durch ein 2^{62} -Eck 35 korrekte Stellen für π . Allerdings konnte er dieses nicht mehr selbst veröffentlichen, da er sich drei Jahrzehnte bis zu seinem Lebensende hin mit der Berechnung beschäftigt hat, so tat dies sein Schüler Snellius für ihn. Auf Grund seines Lebenswerks wurden

¹⁴ (vgl. Navarro 2016, 25)

¹⁵ (vgl. C.J. Scriba, 5000 Jahre Geometrie 2. Auflage 2005, S.116)

¹⁶ (vgl. Navarro 2016, S.26)

¹⁷ (vgl. Navarro 2016, S.26 - 27)

¹⁸ (vgl. Ziegenbalg, Elementare Zahlentheorie 2002, S.16)

die 35 Stellen auf seinen Grabstein eingraviert und die Kreiszahl wurde von dort an ihm zu Ehren auch Ludolphsche Zahl genannt.^{19 20 21}

¹⁹ (vgl. <https://www.spektrum.de/magazin/pi-die-story/826451>)

²⁰ (vgl. <https://3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592.eu/die-geschichte-der-zahl-pi/>)

²¹ (vgl. Hess 2016, S.66)

1.3. Die Anfänge der Berechnung von Pi mit Hilfe der Analysis

Mit dem Aufkommen der Analysis hat die fast zwei Jahrtausende benutzte Methode von Archimedes nach so einer langen Zeit letztlich doch sein Ende gefunden. Durch das neu gewonnene Wissen kann das Problem nun mit einer ganz anderen Herangehensweise betrachtet werden und so der Grenzwert als neues Hilfsmittel gewonnen werden. Denn durch den Limes konnte John Wallis im Jahr 1685 die 34. Konvergente für die Kreiszahl berechnen. Er hat eine an sich einfach gebaute Reihe an wiederkehrenden variierenden Rechenoperationen dafür gefunden, die wie folgt aussieht:

$$„(1) \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \text{“}^{22}$$

Nach ihm folgen kurz darauf auch noch weitere Personen mit weiteren unendlichen Ketten, um dieses Verfahren zu optimieren und dadurch eine schnellere Annäherung zu erhalten.²³ Dies war nun der Anstoß, dass nun erstmal in sehr kurzer Zeit viele Verfahren ausgetüfelt wurden, die in der Grundidee ähnlich sind. So folgten Brouncker, Newton, Leibniz und zuletzt im 18. Jhd. n.Chr. Euler mit ihren unterschiedlichen und meist nach ihrem Namen benannten Reihen, um ihre mathematischen Fähigkeiten unter Beweis zu stellen. Diese sind nun in der selben Reihenfolge, wie die Mathematiker aufgeführt:

$$„[(2) \text{ Brouncker}] \frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots}}}} \text{“}$$

$$[(3) \text{ Newton}] \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3 - 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2^7} + \dots$$

$$[(4) \text{ Leibniz}] \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \dots$$

$$[(5) \text{ Euler}] \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \text{“}^{24}$$

²² (Schuppar und Humenberger 2015, S.197)

²³ (vgl. Ribenboim, Meine Zahlen, meine Freunde, 2009, S.307)

²⁴ (Schuppar und Humenberger 2015, S.197)

Den vorhin angesprochenen Drang, die Verfahren zu verbessern, erkennt man eindeutig daran, wenn diese angewendet werden. Bei der Annäherung im unendlichen Produkt von Wallis (1) ändert sich beispielsweise selbst noch im 1000. Produkt die dritte Nachkommastelle. Die Newton-Reihe (3) hingegen bestimmt mit dem 8. Summanden bereits 5 Nachkommastellen.²⁵

1.4. Die Berechnung der Kreiszahl in der Zeit der Computer

Mit dem Fortschreiten der Zeit entwickelt sich nicht nur die Mathematik immer weiter, sondern es kommt auch zu bahnbrechenden Neuerungen in den Bereichen der Technik. Im 20. Jhd. wurde zum Beispiel der erste Computer entwickelt. Dadurch konnte die arctan-Reihe von Machin, mit dem er die Grenze von 100 korrekten Stellen für π erreicht hatte, im Jahr 1949 mit dem ENIAC-Computer angewandt werden. Damit konnten nun über 2000 Stellen für π berechnet werden. Trotz dieser großen Anzahl an Stellen dauerte die Berechnung gerade mal ca. 70 Stunden, während Ludolph hingegen ungefähr 350 Jahre zuvor für weniger als ein $\frac{1}{55}$ dieser Stellenanzahl einige Jahrzehnte seines Lebens aufwenden musste.²⁶ Nicht viel später, nämlich im Jahre 1958, überschreitet dann F. Genuys die Marke von 10 000 Stellen mit Hilfe eines IBM 703 Großrechners. Nur elf Jahre später wurde dieser von Daniel Shanks und John W. Wrench wieder mit einem IBM Computer, einem IBM 7090, verzehnfacht. Erneut verzehnfacht wurde der neue Rekord im Jahre 1973 von Guilloud und Boyer. So stößt die arctan-Reihe mit den nun erreichten 1 000 000 Stellen für π an ihre Grenzen. Deshalb wurde von Yasumasa Kanada 1983 für die 10 000 000 Stellen und später mit Yoshiaki Tamura und Yoshinobu Kubo für die 134.214.700 die FFT Multiplikation angewendet.²⁷ Im August 1989 wurde die Marke von 1 000 000 000 Stellen von Gregory V. Chudnovskys und David V. Chudnovskys überschritten, worauf 13 Jahre danach Yasumasa Kanada und ein neunköpfiges Spezialisten-Team mit unglaublichen Stellen 1 241 100 000 000 nachlegte. So wurde auch dieser Rekord mehrmals gebrochen, wobei wir 2016 bei den bereits genannten 22,4 Billionen Stellen angelangt und auch noch heute am 31.10.2018 geblieben sind.^{28 29}

²⁵ (vgl. Schuppar und Humenberger 2015, S.208)

²⁶ (vgl. Schuppar und Humenberger 2015, S.213)

²⁷ (<https://3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592.eu/die-geschichte-der-zahl-pi/>)

²⁸ (vgl. Navarro 2016, S.91)

2. Die eigene Berechnung der Kreiszahl

2.1. Geometrie – Archimedes

Obwohl bereits eine sehr große Zahl an Nachkommastellen von π bekannt ist, möchte ich mir es nicht nehmen lassen, selbst mit Hilfe von aus verschiedenen Zeitaltern bekannten Methoden und einem Computerprogramm eine Annäherung für Pi zu berechnen. Bei der bereits beschriebenen Vorgehensweise von Archimedes handelt es sich bekannterweise um eine auf der Geometrie basierende.

Dabei werde ich meine Berechnungsmethode etwas abändern, indem ich mich an Pi mit dem innen liegenden Polygon annähere.

Wenn ich dies nun an einem Kreissektor von 60° betrachte, bilden die beiden an den Seiten eingezeichneten Strecken r mit einer Länge von je $1LE$ und eine dritte Strecke c mit derselben Länge, welche ihre Anfangs- beziehungsweise Endpunkt an dem Berührungspunkt von r mit k hat, ein gleichseitiges Dreieck, welches sich mit dem Kreissektor die beiden Seiten r teilt (siehe Abbil-

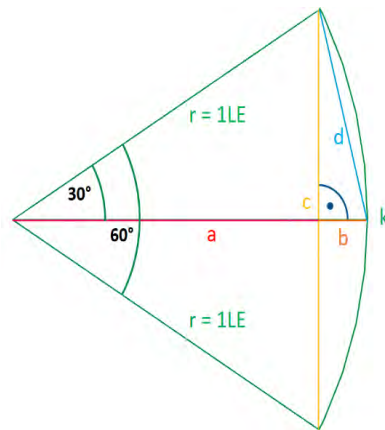


Abbildung 5 Kreissektor mit Polygonsektor (Eigene Darstellung)

dung 2). So erhalte ich durch die Strecke c eine Annäherung an k und dementsprechend im Ganzen betrachtet eine Annäherung von $6 \cdot c$ an den Kreisumfang U . Anschließend wird in dem Dreieck eine Winkelhalbierende a mit der Verlängerung b , wofür stets gilt $a + b = r$, eingefügt. Dadurch erhalte ich nun die Dreiecke mit den Seitenlängen $\frac{c}{2}$, b und d bzw. $\frac{c}{2}$, r und a , wobei a und b auf c senkrecht stehen. Mit Hilfe der neuen Dreiecke kann ich durch d , wie vorhin bei c , eine Annäherung an den Kreis erreichen. Also können c und d auch alternativ als c_1 und c_2 bezeichnet werden und anschließend dieselbe Operation wieder mit dem Dreieck $rd(a + b)$ durchgeführt werden, wodurch ich nun im Ganzen betrachtet ein Polygon mit $n = 12$ Ecken und eine noch besseren Annäherung von $n \cdot c_2$ an U erhalte (vgl. Abbildung 2). So dass, wenn ich diese Operation beliebig oft durchführe, die Anzahl der Ecken n und der Winkel α jeweils verdoppelt beziehungsweise halbiert wird und sich das Polygon immer

²⁹ (<https://3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592.eu/die-geschichte-der-zahl-pi/>)

mehr von innen an den Kreis anschmiegt. Schließlich kann mit dem bloßen Auge irgendwann kein Unterschied mehr erkannt werden.³⁰

³⁰ (vgl. Schuppar und Humenberger 2015, S.198)

Dieser Vorgang kann man nun entweder händisch berechnet werden, wie dies im alten Griechenland und auch später gemacht wurde, oder man überlässt einem Computer das Rechnen, der das wesentlich schneller und vor allem auch fehlerfrei im Gegensatz zum Menschen kann. Deshalb habe ich mich dafür entschieden, mit Hilfe von einem Programm namens „Intellij IDEA“ auf Java diesen Vorgang selbst zu simulieren. Dazu habe ich ein Programm geschrieben, welches innerhalb von Sekundenbruchteilen eine gute Annäherung an die Kreiszahl errechnen kann. Nun zum Inhalt des Programms. Der Code überstreckt sich über circa 30 Zeilen (vgl. Abbildung 1 im Anhang). In der ersten Zeile wird der Speicherort dessen festgelegt, worauf ich anschließend eine benötigte Erweiterung für das Grundprogramm importiert habe. Darauf kommt die Klasse „PIVersion3“ mit der Methode, in der die Berechnung angestellt wird. Zuerst habe ich alle vorkommenden Variablen deklariert und r den Wert 1, c den Anfangswert 1 und $n = 6$, da die Anzahl der Ecken zu Beginn 6 beträgt, zugeschrieben. Danach folgt dann die Deklaration des ersten Ergebnisses *result* als $\frac{n \cdot c}{2}$ und damit der Wert *result* = 3,0 als Annäherung an Pi, welcher dann in der Zeile darauf ausgegeben wird. Zuletzt verdoppele ich den Wert von n ($n_2 = 12$) und berechne in einer for-Schleife mit 25 Wiederholungen nacheinander die Strecken a , b und d , welche, wie bereits erwähnt, als c_2 fungiert, worauf mit dem neuen c_2 der Umfang U und letztendlich eine Annäherung für Pi berechnet und anschließend ausgegeben wird.

Aus den folgenden Teilrechnungen

$$\begin{aligned}
 a &= \sqrt{r^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} \\
 b &= r - a \\
 d &= \sqrt{b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = c_2 \\
 u_m &= n_m \cdot c_m \\
 result &= \frac{u}{2} = \pi
 \end{aligned}$$

ergibt sich die Gesamtrechnung

$$\pi \cong \frac{1}{2} n \sqrt{\left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}.$$

Um das Verhalten von Pi möglichst genau zu bestimmen, kann die Gleichung in eine Limesfunktion umgewandelt werden, damit man im Unendlichen die bestmögliche Annäherung erhält.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} n_m \sqrt{\left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{c_m}{2}\right)^2} \right)^2 + \left(\frac{c_m}{2}\right)^2} = \pi$$

Mit dem Datentyp double ist allerdings eine maximale Angabe von 16 Nachkommastellen möglich. Deshalb habe ich die Anzahl der Durchläufe so gewählt, dass die letzten beiden Durchläufe den double voll ausschöpfen und den selben Wert $\pi \cong 3,1415926535897936$ mit 16 korrekten Stellen angeben (vgl. Tabelle 1 im Anhang).

2.2. Analysis – Leibniz-Reihe

Nach der vorherigen Betrachtung gehen wir nun einige Jahrhunderte in der Geschichte voran, bis wir auf die Leibniz-Reihe treffen, deren Ursprung, wie bereits erläutert, bekannterweise bei Leibniz und der Analysis liegt. Dementsprechend nehme ich mir nun wieder die Leibniz-Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \dots$$

zur Hand und schreibe sie in

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 4}{2k+1} = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - + \dots = \pi$$

um, dass ich nun theoretisch für diese Reihe bis zu einem unendlich großen Wert für k π als Ergebnis erhalte.³¹

Aufgrund dieser Basis kommt nun mein zweites Programm ins Spiel. Dieses hat seinen Speicherplatz im selben Ordner wie das vorherige und diesmal die Klassenbezeichnung „PIVersion2“ mit einer Methode (vgl. Abbildung 2 im Anhang). Darin werden dann die Variablen als $x = 1$; $y = 3$; $n = 0$ und $result = 0.0D$ mit dem Datentyp double deklariert. Bei *result* handelt es sich wieder um das Er-

³¹ (vgl. Schuppar und Humenberger 2015, S.197)

gebnis, welches als *result* = 0 definiert wird, durch den Nachsatz. 0D eine höhere Genauigkeit erhält und dann später ausgegeben wird.

Bei der Variablen *n* handelt es sich nur um eine Kontrollvariable, welche die Anzahl an Durchläufen mitzählt und anschließend jeweils das Ergebnis ausgibt. Die beiden Variablen *x* und *y* sind nun zur Berechnung für Pi zuständig, indem zu ihrem Startwert nach jedem Durchlauf 4 dazu addiert wird, um die Reihe zu simulieren.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{x+4k} - \frac{4}{y+4k} &= \frac{4}{x+0} - \frac{4}{y+0} + \frac{4}{x+4} - \frac{4}{y+4} + \frac{4}{x+8} - + \dots = \\ &= \frac{4}{1+0} - \frac{4}{3+0} + \frac{4}{1+4} - \frac{4}{3+4} + \frac{4}{1+8} - + \dots = \\ &= \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - + \dots = \pi \end{aligned}$$

Allerdings erhält man mit der von unten an π konvergierenden Leibniz-Reihe beispielsweise nach 844 Durchläufen erst eine Annäherung von

$$\pi \geq 3,1410002365801555$$

mit einer Übereinstimmung von lediglich drei Nachkommastellen.

2.3. Stochastik – Monte-Carlo-Simulation

Nun zuletzt zu einer nicht allzu üblichen Methode, um die Kreiszahl zu berechnen. Es ist eine, die wiederum in einem anderen Gebiet der Mathematik ihren Ursprung hat. Die vielfältig einsetzbare Monte-Carlo-Simulation, welche allgemein die Generierung von zufälligen Punkten in beispielsweise einer Fläche nutzt, um Verhältnisse darzustellen. In meinem Fall gehe ich von einem, sich im ersten Quadranten befindliches Einheitsquadrat *E* aus. Das Gegenstück bildet dabei ein im selben Quadranten liegender Viertelkreis *K* mit einem Radius *r* = 1 und seinem Mittelpunkt im Ursprung (vgl. Abbildung 3). „Aus dem Einheitsquadrat *E* wähle man zufällig und unabhängig voneinander *n* Punkte P_1, P_2, \dots, P_n mit den Koordinaten

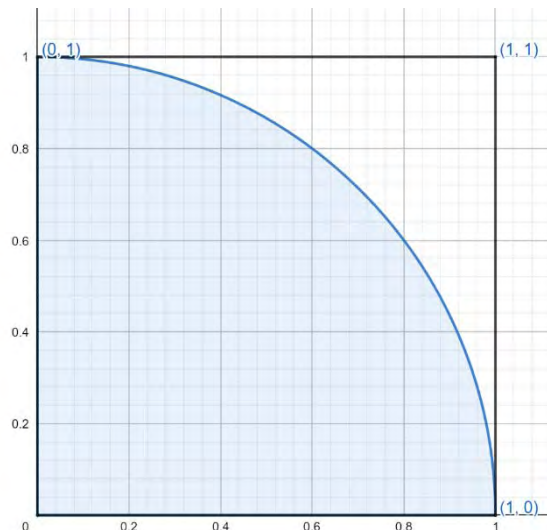


Abbildung 9 Kreissektor im Einheitsquadrat (Eigene Darstellung)

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ so aus, dass jeder Punkt des Einheitsquadrates E die gleiche Auswahlchance besitzt.“³²

So ergeben sich mit dieser Grundlage zwei Möglichkeiten. Die eine Möglichkeit ist, dass ein Punkt P_i im Kreissektor liegt, die andere, dass er sich außerhalb befindet. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt P_i im Kreissektor K ist

$$P(A) = \frac{\text{Fläche von } K}{\text{Fläche von } E} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4}.$$

Bei einer zufälligen und unabhängigen Auswahl von n Punkten P_1, \dots, P_n mögen m Punkte im Viertelkreis liegen. Die relative Häufigkeit $h_n(A)$ des zufälligen Ergebnisses A ist dann $h_n(A) = \frac{m}{n}$. Nach der statistischen Wahrscheinlichkeitsdefinition gilt für [ein] großes n

$$P(A) \approx h_n(A) = \frac{m}{n}.$$

Demzufolge erhalte ich für ein immer größer werdendes n mit $\pi \approx \frac{4m}{n}$ eine immer bessere Annäherung für π .³³

Nun zu der Umsetzung, in der ich wie zuvor die notwendigen Komponenten für die jeweilige Klasse, diesmal „PIVersion4“, importiere (vgl. Abbildung 3 im Anhang). Zuerst deklariere ich in der Methode die vorher bereits genannten Variablen und eine Zufallszahl a im Bereich $[0,1]$ mit dem Datentyp `double`. Daraufhin werden je eine zufällige x_1 - und y_1 -Koordinate generiert, mit welchen dann der Betrag des Ortsvektors $\overrightarrow{OP_1}$ mit dem Satz des Pythagoras berechnet wird. Anschließend wird ermittelt, ob dieser Wert größer oder gleich r ist und damit in dem Kreissektor K liegt oder nicht. Zuletzt wird das Verhältnis $\frac{4m}{n}$ berechnet und als Näherungswert für π angegeben. Dieser Vorgang wiederholt sich sehr oft, da sonst die genannte Wahrscheinlichkeitsdefinition nicht gilt. So erhalte ich nach einem Versuch mit 1 000 000 Durchläufen einen Wert von $\pi \cong 3.1418422836845674$ und damit vier korrekte Stellen.

2.4. Vergleich der Berechnungsmethoden

Nach diesen drei Beispielen stellt sich nun die Frage, welche die Beste ist. Oder kann hier überhaupt von besser und schlechter gesprochen werden? In Anbetracht

³² (Friedrich und Pietschmann, Numerische Methoden - ein Lehr- und Übungsbuch 2010, S.456)

³³ (Friedrich und Pietschmann 2010, S.456-457)

der Annäherungsgeschwindigkeit ist die Antwort „ja“. Es ist bestimmt bereits aufgefallen, dass es bei dieser enorme Unterschiede gibt (vgl. Tabelle 2 im Anhang). Um diese besser vergleichen zu können, habe ich die Methoden jeweils so erweitert, dass immer nur der Wert und die Anzahl der dafür benötigten Durchläufe n ausgegeben wird, wenn dieser Näherungswert eine neue korrekte Stelle von π preisgibt (vgl. Abbildung 4 im Anhang). Für die erste Stelle liegen die Werte für n noch vergleichsweise nah aneinander, dies ändert sich aber im Verlauf. Dadurch ist erkennbar, dass sich das Verhältnis

$$V = \frac{\text{Anzahl Durchläufe}}{\text{Anzahl korrekte Stellen}} = \frac{n_D}{n_S}$$

in einem Diagramm mit x- und y-Achse je unterschiedlich verhält.

Bei der geometrischen Methode handelt es sich bei der Regressionskurve (Trendlinie) des Verhältnisses um eine lineare Funktion, was bedeutet, dass die Annäherung ziemlich gut ist (vgl. Abbildung 5 im Anhang). Denn die Trendlinie des Verhältnisses V der Leibniz-Reihe dagegen verhält sich wie eine Exponentialfunktion (vgl. Abbildungen 6 und 7 im Anhang). Das bedeutet, dass für jede neue Stelle eine vielfache Anzahl an Durchläufen benötigt wird. Dadurch hat die Methode für die Bestimmung von gerade mal acht Stellen 9 331 201 Durchläufe benötigt und damit auch schon ihre Maximalgrenze an Stellen erreicht, die sie angeben kann. Nachdem in dieser immer kleiner werdende Werte zu dem Ergebnis *result* addiert werden, werden die Werte irgendwann zu klein, um sie mit der maximalen Anzahl von 16 Nachkommastellen des doubles anzugeben. Folglich wird nur noch null addiert und damit ist keine genauere Annäherung als $\pi \cong 3.1415926445762157$ möglich (vgl. Tabelle 2 im Anhang). Wenn man dann aber die angegebene Beispielsimulation, da sich die Werte aufgrund der Zufallszahlen immer variieren, betrachtet, ist anhand der Punkte nur schwer eine Regressionskurve erkennbar. Wegen der Zufallszahlen kommt es auch zu dem Ereignis, dass eine auf zwei Stellen genaue Annäherung früher auftritt, als die auf eine Stelle oder, dass eine auf eine weitere Stelle genaue Annäherung nur wenige Durchläufe später auftritt und eine andere vergleichsweise sehr weit entfernt ist. Wenn dies außer Betracht gelassen wird, kann sie am ehesten als Polynomfunktion zweiten Grades beschrieben werden (vgl. Abbildung 8 im Anhang). Damit besitzt diese eine schnellere Annäherung als die vorherige Exponentialfunktion.

Die Effektivität ergibt sich damit aus der maximalen Anzahl an Stellen. Dabei fällt ironischer weise auf, das in meiner Anwendung die Methode nach Archimedes sowohl die effektivste als auch älteste ist, gefolgt von der Leibniz Reihe und zuletzt der Methode auf Grundlage der Monte-Carlo-Simulation.

III. Pi und das Universum?!

Mit der Darstellung der Geschichte um Pi ist nun klar geworden, dass die Kreiszahl nicht eine einfache Zahl aus der Neuzeit ist, auch nicht eine einfache Variable, wie man es wohl möglich fälschlicherweise annehmen könnte, sondern, dass doch sehr viel mehr dahinter steckt. So sind es auch nicht wir, die diese Relevanz erkannt haben, auch wenn wir es gerne wären. Es waren Mathematiker, Astronomen, Physiker, Ingenieure und sogar Philosophen. Aber wenn ich jetzt alle, von denen bekannt ist, dass sie sich mit der Zahl π beschäftigt haben, hier aufzählen würde, fänden diese nicht auf einer Seite Platz.

Wobei zu bemerken ist, dass ich dann nur die aufgezählt hätte, bei denen dies allgemein bekannt ist. Die große Menge, die sich bis zu einem – wenn auch kleinen – Teil mit Pi beschäftigt hat, wäre dann jedoch ungenannt geblieben. Ich bin mir ziemlich sicher, dass all diese Namen vollständig aufgeschrieben nicht einmal in den 4614 Verse von Johann Wolfgang Goethes Faust I Platz finden würden. Das Drama Faust I wiederum könnte in Pi stecken. Denn die Ziffern der Kreiszahl sind nach Auffassung der meisten Mathematiker zufällig. Wenn man die Ziffern kodieren und in Buchstaben übertragen würde, ergibt sich in Übereinstimmung mit dem Infinite-Monkey-Theorem, dass Pi jeden Text, auch Goethes Faust, enthält.^{34 35}

Die Zahl Pi ist so umfassend, dass schon seit Jahrtausenden an dieser Zahl geforscht wird und sich beinahe jeder Depp, einschließlich mir, der meint ein gutes Verständnis von Mathematik zu haben, mit ihr beschäftigt hat und sich auch in Zukunft damit beschäftigen wird.

Trotz aller Bemühungen ist es unwahrscheinlich, dass die Menschheit das Geheimnis um Pi jemals lüften wird. Nach einer Schätzung der Brüder Chudnovsky werden wir es trotz Einsatz aller Ressourcen nie schaffen, mehr als 10^{77} Stellen von Pi zu berechnen. Deshalb schließe ich meine Seminararbeit auch mit einem Zitat des Mathematikers David Chudnovsky ab:

„Die Zahl Pi zu erforschen bedeutet, das Universum zu erforschen“³⁶

³⁴ (vgl. [http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/mathematik-ist-die-kreiszahl-pi-normal a895876.html](http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/mathematik-ist-die-kreiszahl-pi-normal-a895876.html))

³⁵ (vgl. Hess 2016, S.67)

³⁶ (vgl. <https://www.welt.de/print-welt/article379055/Pi-mal-Daumen-oder-die-graue-Eminenz-der-Mathematik.html>)

IV. Erklärung zur selbstständigen Anfertigung der Seminararbeit

Hiermit versichere ich, Sebastian Striewski, die vorliegende Seminararbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt zu haben.

Ort, Datum

Sebastian Striewski

Anhang

V. Literaturverzeichnis

- „1. Könige 7, 23.“ In *Die Bibel - nach der Übersetzung Martin Luthers*. Stuttgart: Deutsche Bibelgesellschaft, 2007.
- Boeing, Niels. *Zeit Online*. 14. 03 2016. <https://www.zeit.de/zeit-wissen/2016/02/pi-tag-mathematik-pi-kreiszahl> (Zugriff am 30. 10 2018).
- C.J. Scriba, P. Schreiber. *5000 Jahre Geometrie, 2. Auflage*. Heidelberg: Springer, 2005.
- Dambeck, Holger. *Spiegel Online*. 29. 04 2013. <http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/mathematik-ist-die-kreiszahl-pi-normal-a895876.html> (Zugriff am 30. 10 2018).
- Friedrich, Hermann, und Frank Pietschmann. *Numerische Methoden - ein Lehr- und Übungsbuch*. Berlin/New York: de Gruyter, 2010.
- Hess, Christian. *Math up your life – schneller rechnen, besser leben*. München: C.H. Beck, 2016.
- Lossau, Norbert. *Die Welt*. 14. 03 2002. <https://www.welt.de/print-welt/article379055/Pi-mal-Daumen-oder-die-graue-Eminenz-der-Mathematik.html> (Zugriff am 30. 10 2018).
- n.p. *Die Kreiszahl Pi - Faszination in Ziffern*. 2018. <https://3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592.eu/die-geschichte-der-zahl-pi/> (Zugriff am 30. 10 2018).
- . *Die Kreiszahl Pi - Faszination in Ziffern*. 2018. <https://3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592.eu/rekorde-im-pi-auswendig-aufsagen/> (Zugriff am 30. 10 2018).
- . *Die Kreiszahl Pi - Faszination in Ziffern*. 2018. <https://3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592.eu/pi-wissen/pi-nachkommastellen-rekorde> (Zugriff am 30. 10 2018).
- Navarro, Joaquin. *Das Geheimnis von π - Verhältnisse in der Mathematik*. Kerkdriel: Librero IBP, 2016.
- Ribenboim, Paulo. *Meine Zahlen, meine Freunde*. Übersetzung: Jörg Richstein. Heidelberg: Springer, 2009.
- Schuppar, Berthold, und Hans Humenberger. *Elementare Numerik für die Sekundarstufe*. Heidelberg: Springer Spektrum, 2015.
- Volkert, Klaus. *Spektrum*. 01. 06 2000. <https://www.spektrum.de/magazin/pi-die-story/826451> (Zugriff am 30. 10 2018).
- Ziegenbalg, Jochen. *Elementare Zahlentheorie*. Frankfurt am Main: Harri Deutsch, 2002.

VI. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1 Code Berechnung nach Archimedes	23
Abbildung 2 Code Leibniz-Reihe.....	23
Abbildung 3 Code Monte-Carlo-Methode	24
Abbildung 4 Code zum Ausgeben der Werte.....	26
Abbildung 5 Verhältnisdiagramm Archimedes (untere Grenze).....	27
Abbildung 6 Verhältnisdiagramm Leibniz-Reihe	27
Abbildung 7 Verhältnisdiagramm Leibniz-Reihe mit lg Skalierung	28
Abbildung 8 Verhältnisdiagramm Monte-Carlo-Simulation.....	28

VII. Tabellenverzeichnis

Tabelle 1 Berechnung nach Archimedes	Fehler! Textmarke nicht definiert.
Tabelle 2 Vergleich der Methoden	29

```

1 package de.basti.pi;
2
3 import static java.lang.Math.*;
4
5 public class PIVersion3 {
6     public static void main( String[]args ) {
7         double r = 1;
8         double n = 6;
9         double a;
10        double b;
11        double c = 1;
12        double d;
13        double u;
14
15        double result = (n*c)/2;
16        System.out.println( result );
17        //double p = 3.14159265358979323-result; //zur Bestimmung der Abweichung
18        //System.out.println( p );
19
20        for (int h = 0; h <= 25; h = h+1){
21
22            n = n*2;
23
24            a = sqrt(r*r - (c/2)*(c/2));
25            b = r - a;
26            d = sqrt(b*b + (c/2)*(c/2));
27            c = d;
28            u = n*c;
29            result = u/2;
30            System.out.println( result );
31            //p = 3.1415926535897932-result; //zur Bestimmung der Abweichung
32            //System.out.println( p );
33        }
34    }

```

Abbildung 1 Code Berechnung nach Archimedes

```

1 package de.basti.pi;
2
3 public class PIVersion2 {
4     public static void main( String[]args ) {
5         double x = 1.0D;
6         double y = 3.0D;
7         double n = 0;
8         double result = 0.0D;
9
10        while ( true ) {
11            result = result + ((4.0D / x) - (4.0D / y));
12            x += 4;
13            y += 4;
14            n++;
15            System.out.println( result );
16            System.out.println( n );
17        }
18    }

```

Abbildung 2 Code Leibniz-Reihe


```

1 package de.basti.pi;
2
3 import static java.lang.Math.*;
4 import java.util.Random;
5
6 public class PIVersion4 {
7     public static void main(String[] args) {
8
9         double r = 1.0D;
10        double c;
11        double m = 0;
12        double n = 0;
13        double result;
14        final Random a = new Random();
15
16        boolean s = true;
17        boolean t = true;
18        boolean u = true;
19        boolean d = true;
20        boolean e = true;
21        boolean f = true;
22        boolean g = true;
23        boolean h = true;
24        boolean i = true;
25        boolean j = true;
26        boolean k = true;
27
28        while (true) {
29
30            n++;
31            double x = a.nextDouble();
32            //System.out.println(x); //zur Überprüfung der Zufallszahlen
33            double y = a.nextDouble();
34            //System.out.println(y); //zur Überprüfung der Zufallszahlen
35            c = sqrt(x * x + y * y);
36
37            if (c <= r) {
38                m++;
39            }
40
41            result = (4 * m / n);
42
43            System.out.println(result);
44            System.out.println(n);
45        }
46    }
47 }

```

Abbildung 3 Code Monte-Carlo-Methode

```

1
2
3   boolean s = true;
4       boolean t = true;
5       boolean u = true;
6       boolean d = true;
7       boolean e = true;
8       boolean f = true;
9       boolean g = true;
10      boolean h = true;
11      boolean i = true;
12      boolean j = true;
13      boolean k = true;
14
15      if (result >= 3.0 && result < 3.1) {
16          while (s) {
17              System.out.println(result);
18              System.out.println(n);
19              s = false;
20          }
21          //System.out.println(result);
22          if (result >= 3.0 && result < 3.1) {
23              while (s) {
24                  System.out.println(result);
25                  System.out.println(n);
26                  s = false;
27              }
28          }
29          if (result >= 3.1 && result < 3.2) {
30              while (t) {
31                  System.out.println(result);
32                  System.out.println(n);
33                  t = false;
34              }
35          }
36          if (result >= 3.14 && result < 3.15) {
37              while (u) {
38                  System.out.println(result);
39                  System.out.println(n);
40                  u = false;
41              }
42          }
43          if (result >= 3.141 && result < 3.142) {
44              while (d) {
45                  System.out.println(result);
46                  System.out.println(n);
47                  d = false;
48              }
49          }
50          if (result >= 3.1415 && result < 3.1416) {
51              while (e) {
52                  System.out.println(result);
53                  System.out.println(n);
54                  e = false;
55              }
56          }
57          if (result >= 3.14159 && result < 3.1416) {
58              while (f) {
59                  System.out.println(result);
60                  System.out.println(n);
61                  f = false;
62              }
63          }
64          if (result >= 3.141592 && result < 3.141593) {
65              while (g) {
66                  System.out.println(result);
67                  System.out.println(n);

```

```

68         g = false;
69     }
70 }
71 if (result >= 3.1415926 && result < 3.1415927) {
72     while (h) {
73         System.out.println(result);
74         System.out.println(n);
75         h = false;
76     }
77 }
78 if (result >= 3.14159265 && result < 3.14159266) {
79     while (i) {
80         System.out.println(result);
81         System.out.println(n);
82         i = false;
83     }
84 }
85 if (result >= 3.141592653 && result < 3.141592654) {
86     while (j) {
87         System.out.println(result);
88         System.out.println(n);
89         j = false;
90     }
91 }
92 if (result >= 3.141592653 && result < 3.141592654) {
93     while (k) {
94         System.out.println(result);
95         System.out.println(n);
96         k = false;
97     }
98 }
99 }
100 }

```

Abbildung 4 Code zum Ausgeben der Werte

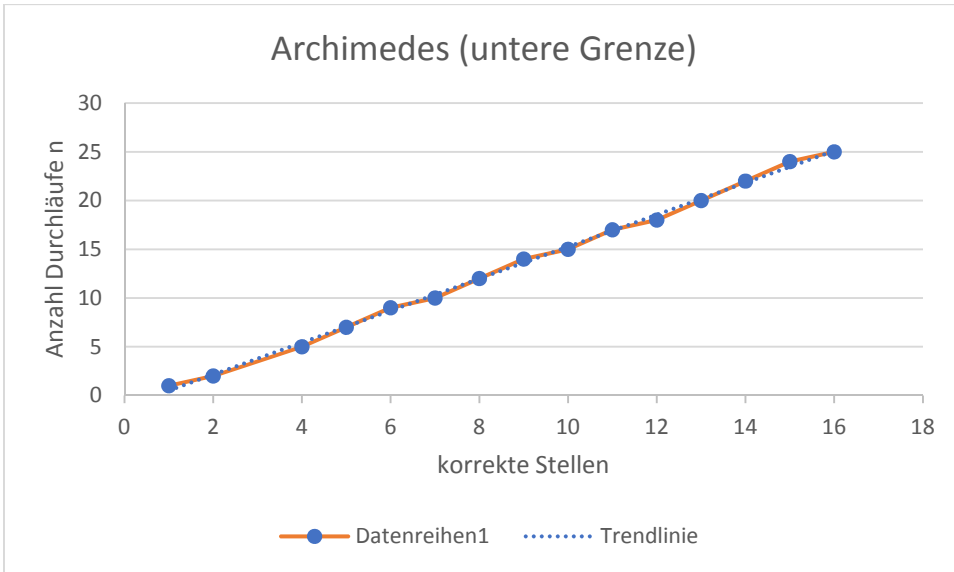


Abbildung 5 Verhältnisdiagramm Archimedes (untere Grenze)

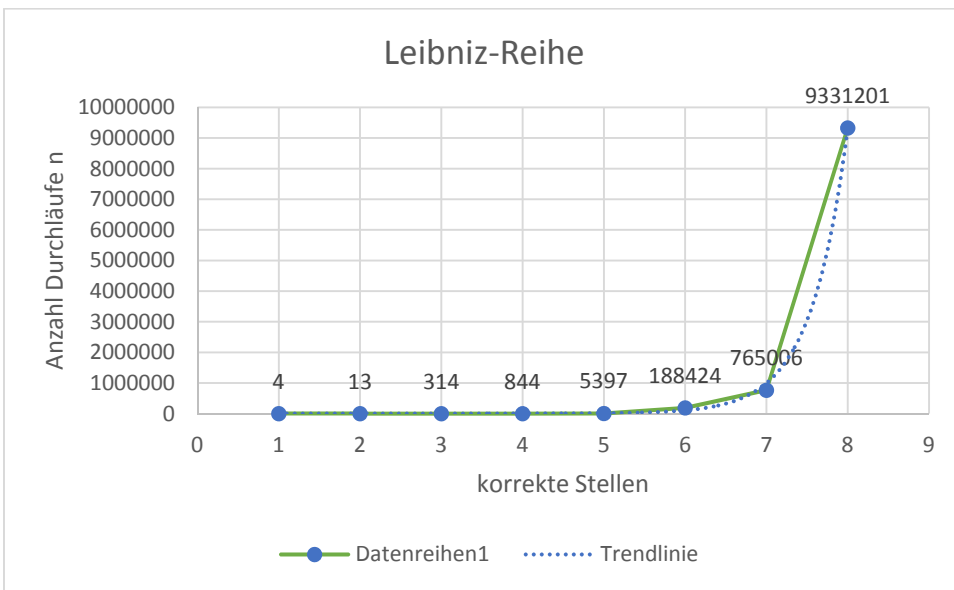


Abbildung 6 Verhältnisdiagramm Leibniz-Reihe

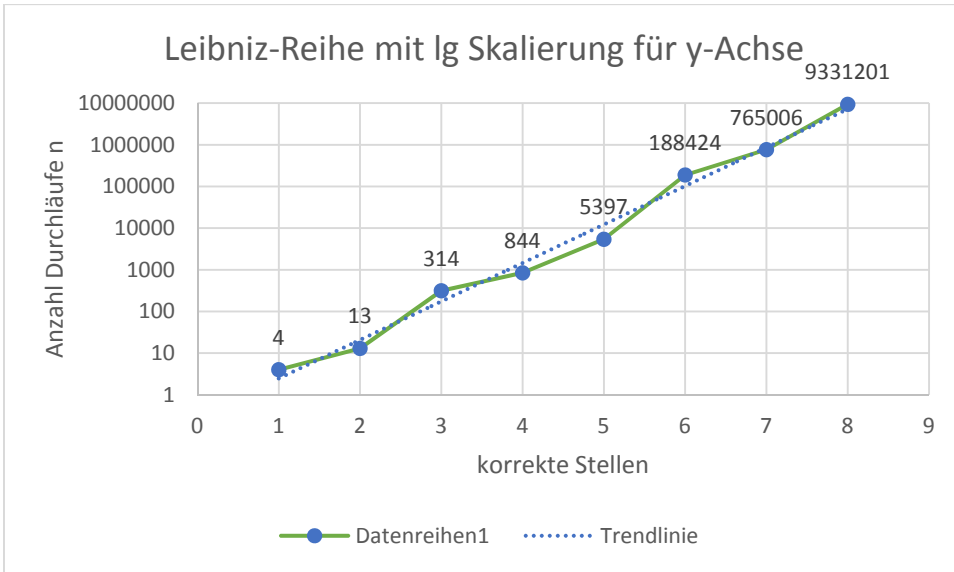


Abbildung 7 Verhältnisdiagramm Leibniz-Reihe mit lg Skalierung

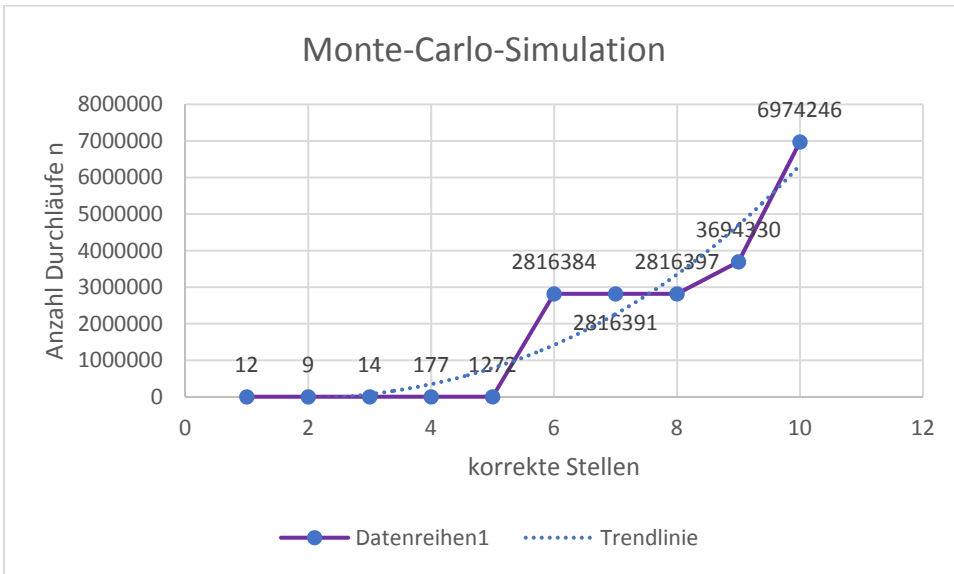


Abbildung 8 Verhältnisdiagramm Monte-Carlo-Simulation

Durchlauf	Anzahl Ecken	Näherungswert für Pi	ungefähre Abweichung
1	6	3.0	0.14159265358979323
2	12	3.105828541230249	0.03576411235954424
3	24	3.1326286132812378	0.008964040308555354
4	48	3.1393502030468667	0.0022424505429263775
5	96	3.14103195089051	5.60702699283322E-4
6	192	3.1414524722854624	1.4018130433068876E-4
7	384	3.141557607911858	3.504567793521929E-5
8	768	3.1415838921483186	8.761441474547382E-6
9	1.536	3.1415904632280505	2.190361742648861E-6
10	3.072	3.1415921059992717	5.475905213714327E-7
11	6.144	3.1415925166921577	1.368976354498841E-7
12	12.288	3.141592619365384	3.422440908451563E-8
13	24.576	3.141592645033691	8.556102049084302E-9
14	49.152	3.141592651450768	2.139024957159563E-9
15	98.304	3.1415926530550373	5.34755795200681E-10
16	196.608	3.1415926534561045	1.3368861573326285E-10
17	393.216	3.141592653556372	3.342126575489601E-11
18	786.432	3.141592653581438	8.355094394119078E-12
19	1.572.864	3.1415926535877046	2.0885515539248445E-12
20	3.145.728	3.1415926535892713	5.218048215738236E-13
21	6.291.456	3.141592653589663	1.3011813848606835E-13
22	12.582.912	3.141592653589761	3.197442310920451E-14
23	25.165.824	3.1415926535897856	7.549516567451064E-15
24	50.331.648	3.1415926535897913	1.7763568394002505E-15
25	100.663.296	3.141592653589793	2.3846264338327950E-15
26	201.326.592	3.1415926535897936	4.440892098500626E-16
27	402.653.184	3.1415926535897936	4.440892098500626E-16

Tabelle 1 Berechnung nach Archimedes

Korrekte Stellen	Archimedes (untere Grenze)		Leibniz-Reihe		Monte-Carlo-Simulation	
	Wert	Durchlauf	Wert	Durchlauf	Wert	Durchlauf
1	3.0	1	3.0170718170718174	4	3.0	12
2	3.105828541230249	2	3.1031453128860114	13	3.1111111	9
3	/		3.1400002979112855	314	3.142857142857143	14
4	3.14103195089051	5	3.1410002365801555	844	3.1412429378531073	177
5	3.141557607911858	7	3.1415000095284675	5 397	3.141509433962264	1 272
6	3.1415904632280505	9	3.141590000000122	18 8424	3.141590067263555	2 816 384
7	3.1415921059992717	10	3.141592000000256	765 006	3.141592200798824	2 816 391
8	3.141592619365384	12	3.1415926000000014	9 331 201	3.141592609280581	2 816 397
9	3.141592651450768	14			3.141592656855235	3 694 330
10	3.1415926530550373	15			3.141592653886886	6 974 246
11	3.141592653556372	17				
12	3.141592653581438	18				
13	3.1415926535892713	20				
14	3.141592653589761	22				
15	3.1415926535897913	24				
16	3.141592653589793	25				

Tabelle 2 Vergleich der Methoden