

## SEMINARARBEIT

Rahmenthema des Wissenschaftspropädeutischen Seminars:  
Spielzeugphysik

**Leitfach:**

Physik

*Thema der Arbeit:*

*Die Physik des rollenden Doppelkegels*

*Verfasserin: Samira Hatoum*

*Seminarleiter: Bernhard Laux  
Dr. Hans Kern*

Abgabetermin: *spätestens 10. November 2015, 10 Uhr*

Bewertung	Note	Notenstufe in Worten	Punkte		Punkte
schriftliche Arbeit				x 3	
Abschlusspräsentation				x 1	
				Summe:	
Gesamtleistung nach § 61 (7) GSO =				Summe:2 (gerundet)	

---

Datum und Unterschrift der Seminarleiter

# Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung.....	3
2. Hauptteil.....	3
2.1. Beschreibung des Experiments des aufwärtsrollenden Doppelkegels .....	3
2.2. Herleitung der Rollbedingungen .....	4
2.3. Energie .....	7
2.3.1. Kinetische Energie .....	7
2.3.1.1. Translationsenergie .....	7
2.3.1.2. Rotationsenergie.....	8
2.3.2. Potentielle Energie .....	9
2.4. Geschwindigkeit.....	9
2.4.1. Bestimmung von $\dot{x}_S^*(t)$ eines gleitenden Doppelkegels.....	9
2.4.1.1. Lagrange-Funktion .....	10
2.4.1.2. Lagrange-Gleichung .....	10
2.4.2. Bestimmung von $\dot{x}_S(x_S(t))$ eines rollenden Doppelkegels.....	11
2.5. Videoanalyse.....	13
2.5.1. Versuchsaufbau .....	13
2.5.2. Beweis der Rollbedingung.....	14
2.5.3. Vergleich von $\dot{x}_S^*(t)$ eines gleitenden Doppelkegels mit $v_x(t)$ des Experiments.....	15
2.5.4. Vergleich von $\dot{x}_S(x_S(t))$ eines rollenden Doppelkegels mit $v_{ges}(t)$ des Experiments.....	16
2.5.5. Veränderung der Parameter und ihre Auswirkungen.....	17
2.6. Ausbau des Schienensystems .....	18
2.6.1. Zwei verbundene V-förmige Schienen.....	18
2.6.2. Parabolische Schienen.....	18
3. Schluss .....	19
4. Literaturverzeichnis.....	20
5. Einheitenverzeichnis .....	21
6. Selbstständigkeitserklärung .....	22

## 1. Einleitung

Um der Gravitation, einem Phänomen, das uns ständig beeinflusst, entgegenzuwirken, braucht es enorme Kräfte. Ein kleines Experiment, das die Gravitation scheinbar durchbricht, erzeugt daher Faszination und Verwirrung. Ist eine „Antigravitation“ [3] in einem solch einfachen Experiment wie dem aufwärtsrollenden Doppelkegel wirklich möglich?

Bereits Mitte des 18. Jahrhunderts beschäftigte sich der holländische Physiker Willem Jacob's Gravesande (1688-1742) mit dem Experiment des aufwärtsrollenden Doppelkegels. Als Erster beschreibt er das Experiment in seinem Werk „Physices Elementa Mathematica Experimentis Confirmata“ (vgl. [4]). Er widerlegt die Vorstellung der Antigravitation in diesem Experiment und nennt den sich nach unten bewegenden Schwerpunkt des Doppelkegels als Ursache der faszinierenden Täuschung.

Im ersten Abschnitt dieser Arbeit wird das Phänomen des rollenden Doppelkegels theoretisch und im zweiten Abschnitt durch eine Videoanalyse praktisch behandelt.

## 2. Hauptteil

### 2.1. Beschreibung des Experiments des aufwärtsrollenden Doppelkegels



*Abb. 1: Seitenansicht auf Doppelkegel auf Schienen [selbst erstellt]*

Ein Doppelkegel liegt auf der Spitze zweier V-förmig angeordneten Schienen. Die Schienen sind an ihrem offenen Ende höher als an der Spitze des V, d.h. je weiter beide Schienen voneinander entfernt sind, desto höher werden sie. Der Doppelkegel rollt zu den Enden der

Schienen hin und es wirkt, als würde er die Schienen hinaufrollen.

Bei genauerem Betrachten erkennt man, dass sich der Schwerpunkt der Doppelkegels zu Beginn in seiner höchstmöglichen Lage befindet und beim Rollen zu den höheren Enden der Schienen absinkt. Da die Schienen von der Spitze zum Ende des V weiter auseinandergehen, wird der Umfang des Doppelkegels, der die Schienen berührt, immer geringer, und der Schwerpunkt des Doppelkegels bewegt sich in Wirklichkeit, ganz nach den uns bekannten physikalischen Gesetzen, nach unten.

## 2.2. Herleitung der Rollbedingungen (vgl.[ 3; S.2f])

Um die Bedingungen, unter denen der Doppelkegel die Schienen „hinaufrollt“, bestimmen zu können, wird im Folgenden zuerst die Bahnkurve des Mittelpunktes, der gleichzeitig der Schwerpunkt des Doppelkegels ist, ermittelt.

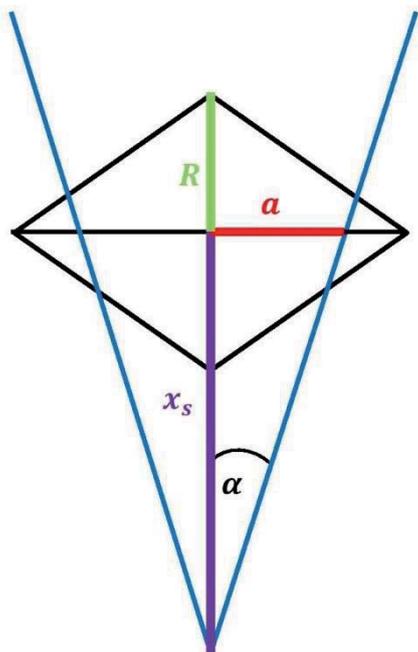


Abb. 2: Vogelperspektive auf Doppelkegel und Schienensystem [selbst erstellt]

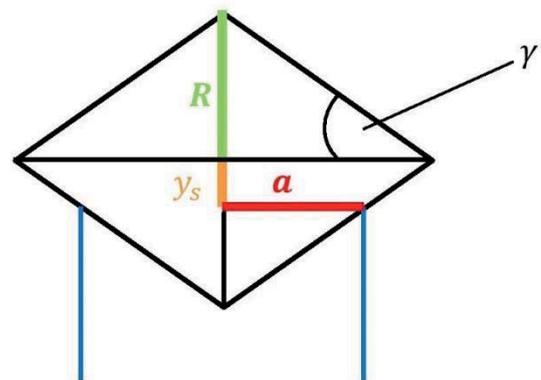


Abb. 3: Frontsicht auf Doppelkegel und Schienensystem [selbst erstellt]

$a$  Strecke von Mittelpunkt des Doppelkegels zum Auflagepunkt des Doppelkegels auf den Schienen

$R$  Radius des Doppelkegels

$x_s$  Strecke von der Spitze der Schienen bis zum Mittelpunkt des Doppelkegels zum Zeitpunkt  $t$

$\alpha$  Halber Öffnungswinkel der Schienen

$y_s$  Abstand vom Auflagepunkt zur Drehachse = Höhendifferenz der Drehachse zum Auflagepunkt

$\gamma$  Halber Öffnungswinkel des Kegels

$$\tan \alpha = \frac{a}{x_s}$$

$$a = x_s \cdot \tan \alpha$$

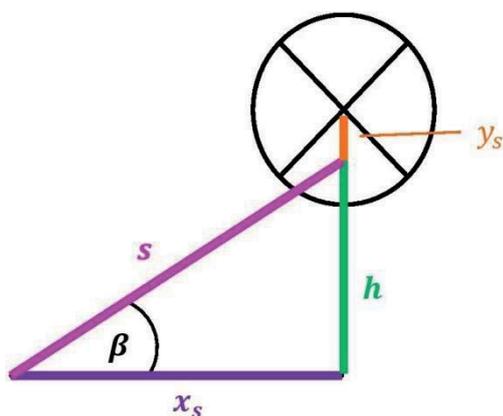
$$\tan \gamma = \frac{R - y_s}{a}$$

$$a = \frac{R - y_s}{\tan \gamma}$$

$$x_s \cdot \tan \alpha = \frac{R - y_s}{\tan \gamma}$$

$$y_s(x_s) = R - x_s \cdot \tan \alpha \cdot \tan \gamma \quad (1)$$

Die Höhendifferenz  $y_s$  gibt die Höhe der Mittelachse durch die Spitzen des Kegels von den Schienen, in Abhängigkeit von der Entfernung  $x_s$  zur Schienenspitze, an. Ist die Höhendifferenz  $y_s = 0$ , bedeutet das, dass die Entfernung der Schienen voneinander gleich der Höhe des Doppelkegels ist. Der Doppelkegel fällt dadurch zwischen den Schienen durch.



$$\tan \beta = \frac{h}{x_s}$$

$$h(x_s) = x_s \cdot \tan \beta \quad (2)$$

Abb. 4: Seitenansicht auf rollenden Doppelkegel  
[selbst erstellt]

- $h$  Höhe des Auflagepunktes
- $s$  Strecke von Spitze des V bis zur Höhe  $h$  des Auflagepunktes
- $\beta$  Winkel zwischen Boden und Ebene, auf der der Kegel rollt

Um die Höhe  $H(x_s)$  der Mittelachse vom Boden aus zu messen, muss die Höhe  $h$  der Schienen in Abhängigkeit von  $x_s$  zur Höhe  $y_s$  der Mittelachse der Schienen addiert werden. Mit der Formel  $H(x_s)$  wird also die Höhe der Mittelachse vom Boden angegeben, sie beschreibt folglich die Bahnkurve der Mittelachse.

Mit (1) und (2):

$$H(x_s) = y_s(x_s) + h(x_s)$$

$$H(x_s) = R - x_s \cdot \tan \alpha \cdot \tan \gamma + x_s \cdot \tan \beta$$

$$H(x_s) = R + x_s \cdot (\tan \beta - \tan \alpha \cdot \tan \gamma) \quad (3)$$

Das Ziel der Festlegung der Rollbedingungen ist es, die Winkel so in einer allgemeinen Gleichung festzulegen, dass der Doppelkegel rollt.

Damit der Doppelkegel rollt, muss die Steigung der Bahnkurve negativ sein. Das bedeutet: Die Ableitung der Bahnkurve  $H(x_s)$  nach  $x_s$  muss kleiner Null sein.

$$\frac{d}{dx_s} H(x_s) = \frac{d}{dx_s} x_s(t) \cdot (\tan \beta - \tan \alpha \cdot \tan \gamma) < 0$$

Der Doppelkegel rollt also unter der Bedingung, dass

$$(\tan \beta - \tan \alpha \cdot \tan \gamma) < 0 \text{ ist.}$$

Es gilt also:

$$\tan \beta < \tan \alpha \cdot \tan \gamma \quad (4)$$

Zur Vereinfachung wird im Folgenden

$$(\tan \beta - \tan \alpha \cdot \tan \gamma) = k \quad (5)$$

definiert. Der Radius und die Masse des Doppelkegels haben keine Auswirkungen auf die Rollbedingungen.

## 2.3. Energie

### 2.3.1. Kinetische Energie

Die kinetische Energie  $E_{kin}$  des rollenden Doppelkegels hat zwei Komponenten: die Translationsenergie  $E_{trans}$ , die der Doppelkegel bei der Bewegung von der Spitze in Richtung Ende der Schienen gewinnt, und die Rotationsenergie  $E_{rot}$ , die er bei der Rotation um seine eigene Achse gewinnt.

Die Formel für die gesamte kinetische Energie  $E_{kin}$  des rollenden Doppelkegels lautet:

$$\begin{aligned} E_{kin}(x_s(t), \dot{x}_s(t)) &= E_{trans}(\dot{x}_s(t)) + E_{rot}(x_s(t), \dot{x}_s(t)) \\ E_{kin}(x_s(t), \dot{x}_s(t)) &= \\ &= \frac{m \cdot (1 + k^2)}{2} \cdot \dot{x}_s^2(t) + \frac{3 \cdot m \cdot R^2 \cdot (1 + k^2)}{10 \cdot (R - x_s(t) \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta)^2} \cdot \dot{x}_s^2(t) \\ &= \dot{x}_s^2(t) \cdot m \cdot (1 + k^2) \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{3 \cdot R^2}{10 \cdot (R - x_s(t) \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta)^2} \right) \end{aligned} \tag{6}$$

Im Folgenden wird die Herleitung dieser Gleichung erklärt.

#### 2.3.1.1. Translationsenergie

Die Bewegungsenergie, die der Doppelkegel erhält, während er von der Spitze der V-förmig angeordneten Schienen zum offenen Ende rollt, wird mit der allgemeinen Formel zur kinetischen Energie beschrieben:  $E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2(t)$

Damit auch die kinetische Energie in Abhängigkeit von der Strecke  $x_s$  - beziehungsweise deren Ableitung - angegeben werden kann und die Geschwindigkeit nicht gemessen werden muss, wird die Geschwindigkeit  $v$  als Ableitung der Strecke  $s$  nach der Zeit  $t$  angegeben.

$$E_{trans} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{s}^2(t)$$

Mit Anwendung des Satz des Pythagoras (vgl. Abb. 4) kann die Strecke  $s$  durch zwei bereits bekannte Variablen ausgedrückt werden.

$$\dot{s}^2(t) = \dot{x}_s^2(t) + \dot{H}^2(x_s(t))$$

Zur Erläuterung:

$$\frac{d}{dt} H(x_s(t)) = \frac{d}{dt} (R + x_s(t) \cdot k) = \dot{x}_s(t) \cdot k$$

$$\begin{aligned} E_{trans}(\dot{x}_s(t)) &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot [\dot{x}_s^2(t) + \dot{x}_s^2(t) \cdot k^2] \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}_s^2(t) \cdot (1 + k^2) \end{aligned}$$

$$E_{trans}(\dot{x}_s(t)) = \frac{m \cdot (1 + k^2)}{2} \cdot \dot{x}_s^2(t) \quad (7)$$

### 2.3.1.2. Rotationsenergie

Die Rotationsenergie beschreibt die kinetische Energie, die der Doppelkegel gewinnt, wenn er sich um seine eigene Achse dreht. Die allgemeine Formel lautet:  $E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$  (vgl. [5; Gleichung 10.2.4.]). Um auch die Rotationsenergie über die Strecke  $x_s$  - beziehungsweise deren Ableitung - definieren zu können, wird die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  wie folgt ausgedrückt.

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{\dot{s}}{y_s}$$

Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  beschreibt die Geschwindigkeit  $v$ , also die Ableitung der Strecke  $s$  nach  $t$ , dividiert durch den von  $x_s$  abhängigen Kreisradius  $r$ , der in diesem Fall  $y_s = R - x_s \cdot \tan \alpha \cdot \tan \gamma$  ist.

$$\omega = \frac{\sqrt{\dot{x}_s^2(t) + \dot{H}_s^2(x_s(t))}}{R - x_s(t) \cdot \tan \alpha \cdot \tan \gamma} = \frac{\sqrt{\dot{x}_s^2(t) + (\dot{x}_s(t) \cdot k)^2}}{R - x_s(t) \cdot \tan \alpha \cdot \tan \gamma} = \frac{\sqrt{\dot{x}_s^2(t) \cdot (1 + k^2)}}{R - x_s(t) \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Setzt man dies in die allgemeine Rotationsgleichung ein, erhält man:

$$E_{rot}(x_s(t), \dot{x}_s(t)) = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \left( \frac{\sqrt{\dot{x}_s^2(t) \cdot (1 + k^2)}}{R - x_s(t) \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta} \right)^2$$

$$E_{rot}(x_s(t), \dot{x}_s(t)) = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \frac{\dot{x}_s^2(t) \cdot (1 + k^2)}{(R - x_s(t) \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta)^2}$$

Das Trägheitsmoment  $J$  für einen Kegel bezüglich der Drehachse durch die Spitzen und den Mittelpunkt der Grundfläche beträgt  $J_{Kegel} = \frac{3}{10} \cdot m \cdot R^2$  (vgl. [5; Tabelle 10.2.1.]), wobei  $m$  die Masse des Gesamtkörpers darstellt und  $R$  dessen Radius.

Da es sich im Experiment um einen Doppelkegel handelt, verdoppelt sich das Trägheitsmoment des Kegels:

$$\begin{aligned}
 E_{rot}(x_s(t), \dot{x}_s(t)) &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{10} \cdot m \cdot R^2 \cdot \frac{\dot{x}_s^2(t) \cdot (1 + k^2)}{(R - x_s(t) \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta)^2} = \\
 &= \frac{3}{10} \cdot m \cdot R^2 \cdot (1 + k^2) \cdot \dot{x}_s^2(t) \cdot \frac{1}{(R - x_s(t) \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta)^2} \\
 E_{rot}(x_s(t), \dot{x}_s(t)) &= \frac{3 \cdot m \cdot R^2 \cdot (1 + k^2)}{10 \cdot (R - x_s(t) \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta)^2} \cdot \dot{x}_s^2(t) \quad (8)
 \end{aligned}$$

### 2.3.2. Potentielle Energie

Die potentielle Energie  $E_{pot}$  ist die Lage- bzw. Höhenenergie des Doppelkegels. Die allgemeine Formel der potentiellen Energie lautet  $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$ , wobei  $m$  die Masse,  $g$  die Fallbeschleunigung und  $h$  die Höhe über dem Bezugspunkt darstellt. Die Höhe über dem Bezugspunkt für den Mittelpunkt des Doppelkegels ist, laut bisheriger Definition, die Höhe des Mittelpunkts des Doppelkegels vom Boden  $H(x_s(t)) = R + x_s(t) \cdot k$ .

$$\begin{aligned}
 E_{pot}(x_s(t)) &= m \cdot g \cdot H(x_s(t)) \\
 E_{pot}(x_s(t)) &= m \cdot g \cdot [R + x_s(t) \cdot k] \quad (9)
 \end{aligned}$$

## 2.4. Geschwindigkeit

### 2.4.1. Bestimmung von $\dot{x}_s^*(t)$ eines gleitenden Doppelkegels (vgl. [2], [6])

Zur Berechnung der Geschwindigkeit kann man den Lagrange-Formalismus verwenden. Ziel dieses Formalismus ist es, einen einfachen Zugang zu konservativen Systemen zu entwickeln. Die allgemeine Vorgehensweise des Lagrange-Formalismus wird auf den gleitenden Doppelkegel angewendet.

### 2.4.1.1. Lagrange-Funktion

$$L = T - V$$

$T$ : kinetische Energie

$V$ : potentielle Energie

Da die kinetische Energie im Fall des rollenden Doppelkegels aus zwei Komponenten, der Translations- und der Rotationsenergie, besteht, ergibt sich rechnerisch ein sehr komplexer Term, der sich mithilfe des Lagrange-Formalismus nicht analytisch lösen lässt.

Der Doppelkegel rotiert, weil Reibungskräfte auftreten. Vernachlässigt man diese, kann man davon ausgehen, dass der Doppelkegel die Schienen „hinaufgleitet“.

Im Folgenden wird die Rotationsenergie  $E_{rot}(x_s(t), \dot{x}_s(t))$  vernachlässigt und die Translationsenergie  $E_{trans}(\dot{x}_s(t))$  als einzige kinetische Energie angenommen.

$$L = E_{trans}(\dot{x}_s(t)) - E_{pot}(x_s(t))$$

Damit es zu keiner Verwechslung der Formelzeichen des rollenden Doppelkegels und den Formelzeichen des gleitenden Doppelkegel kommen kann, werden die Formelzeichen des gleitenden Doppelkegels mit „\*“ bezeichnet, zum Beispiel:  $\dot{x}_s^*(t)$ .

Mit (7) und (9):

$$\begin{aligned} L &= \frac{m \cdot (1 + k^2)}{2} \cdot \dot{x}_s^{*2}(t) - m \cdot g \cdot [R + x_s(t) \cdot k] \\ &= \frac{m \cdot (1 + k^2)}{2} \cdot \dot{x}_s^{*2}(t) - m \cdot g \cdot x_s(t) \cdot k - m \cdot g \cdot R \end{aligned} \quad (10)$$

### 2.4.1.2. Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

Zuerst wird die partielle Ableitung von der Lagrange-Funktion nach  $\dot{x}_s^*$  berechnet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s^*} &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}_s^*} \left( \frac{m \cdot (1 + k^2)}{2} \cdot \dot{x}_s^{*2}(t) - m \cdot g \cdot x_s(t) \cdot k - m \cdot g \cdot R \right) \\ &= \dot{x}_s^*(t) \cdot m \cdot (1 + k^2) \end{aligned}$$

Als nächstes muss die Ableitung von der bereits berechneten partiellen Ableitung nach der Zeit  $t$  berechnet werden:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} = \ddot{x}_s^*(t) \cdot m \cdot (1 + k^2)$$

Die partielle Ableitung der Lagrange-Funktion nach der Strecke  $x_s$  lautet:

$$\frac{\partial L}{\partial x_s} = -m \cdot g \cdot k$$

Zusammengefasst ergibt sich daraus die Lagrange-Gleichung:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_s^*(t) \cdot m \cdot (1 + k^2) - (-m \cdot g \cdot k) &= 0 \\ \ddot{x}_s^*(t) &= \frac{-g \cdot k}{(1 + k^2)} = \frac{-g \cdot (\tan \beta - \tan \alpha \cdot \tan \gamma)}{(1 + (\tan \beta - \tan \alpha \cdot \tan \gamma)^2)} = a(t) \end{aligned}$$

Die resultierende Beschleunigung  $a$  in Abhängigkeit von  $t$  gilt nur bei Vernachlässigung der Rotationsenergie  $E_{rot}$ .

Ebenso gilt die Geschwindigkeit  $v$  in Abhängigkeit von  $t$ , die man durch Integrieren der Beschleunigung  $a$  nach  $t$  erhält, nur bei Vernachlässigung der Rotationsenergie  $E_{rot}$ .

$$\dot{x}_s^*(t) = \int \ddot{x}_s^*(t) dt = \int \frac{-g \cdot k}{1 + k^2} dt = \frac{-g \cdot k}{(1 + k^2)} \cdot t + v_0$$

Es wird die Anfangsbedingung  $\dot{x}_s^*(t = 0) = 0$  gesetzt. Daraus folgt:  $v_0 = 0$ .

$$\dot{x}_s^*(t) = v(t) = \frac{-g \cdot k}{(1 + k^2)} \cdot t \quad (11)$$

### 2.4.2. Bestimmung von $\dot{x}_s(x_s(t))$ eines rollenden Doppelkegels

Um  $\dot{x}_s$  in Abhängigkeit von  $x_s(t)$  für einen rollenden Doppelkegel zu berechnen, wird die Anfangsenergie  $E_0$  des rollenden Doppelkegels zu Beginn gleich der Gesamtenergie  $E_{ges}$  des rollenden Doppelkegels gesetzt. Die Anfangsenergie  $E_0$  des rollenden Doppelkegels entspricht der potentiellen Energie  $E_{pot}(x_s)$  bei  $x_s(t) = 0$ , da der Doppelkegel bei  $x_s(t) = 0$  noch nicht rollt. Die kinetische Energie  $E_{kin}$  ist folglich zu Beginn gleich Null.

In der angeführten Rechnung wird zur besseren Übersicht  $\dot{x}_s^2(x_s(t)) = \dot{x}_s^2$  bezeichnet und  $x_s(t) = x_s$ .

$$E_{ges}(x_s, \dot{x}_s) = E_{kin}(x_s, \dot{x}_s) + E_{pot}(x_s)$$

Mit (6) und (9):

$$E_{ges}(x_s, \dot{x}_s) = \dot{x}_s^2 \cdot \left( \frac{m \cdot (1 + k^2)}{2} + \frac{3 \cdot m \cdot R^2 \cdot (1 + k^2)}{10 \cdot (R - x_s \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta)^2} \right) + m \cdot g \cdot [R + x_s \cdot k]$$

$$E_{pot}(0) = m \cdot g \cdot [R + 0 \cdot k] = m \cdot g \cdot R$$

$$\begin{aligned} m \cdot g \cdot R &= \dot{x}_s^2 \cdot m \cdot (1 + k^2) \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{3 \cdot R^2}{10 \cdot (R - x_s \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta)^2} \right) \cdot m \cdot g \\ &\quad \cdot [R + x_s \cdot k] \\ &= \dot{x}_s^2 \cdot m \cdot (1 + k^2) \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{3 \cdot R^2}{10 \cdot (R - x_s \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta)^2} \right) + m \cdot g \\ &\quad \cdot R + m \cdot g \cdot x_s \cdot k \end{aligned}$$

Dividiert man durch  $m$  und subtrahiert  $(g \cdot R)$ , folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x}_s^2 \cdot (1 + k^2) \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{3 \cdot R^2}{10 \cdot (R - x_s \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta)^2} \right) + g \cdot x_s \cdot k \\ -g \cdot x_s \cdot k &= \frac{1}{2} \cdot \dot{x}_s^2 \cdot (1 + k^2) \cdot \left( 1 + \frac{3 \cdot R^2}{5 \cdot (R - x_s \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta)^2} \right) \\ \dot{x}_s^2 &= - \frac{2 \cdot g \cdot x_s \cdot k \cdot (R - x_s \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta)^2}{(1 + k^2) \cdot \left( (R - x_s \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta)^2 + \frac{3}{5} \cdot R^2 \right)} \\ \dot{x}_s &= \sqrt{- \frac{2 \cdot g \cdot x_s \cdot k \cdot (R - x_s \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta)^2}{(1 + k^2) \cdot \left( (R - x_s \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta)^2 + \frac{3}{5} \cdot R^2 \right)}} \end{aligned}$$

$$\dot{x}_s = \sqrt{-\frac{2 \cdot g \cdot x_s \cdot k}{(1 + k^2) \cdot \left( (R - x_s \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta)^2 + \frac{3}{5} \cdot R^2 \right)}} \cdot (R - x_s \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta)$$

$$= \dot{x}_s(x(t))$$

(12)

Aufgrund der Rollbedingung hat  $k$  einen negativen Wert. Aus dem negativen Term unter der Wurzel ergibt sich ein Positiver und man erhält für  $\dot{x}_s(x_s(t))$  ein reelles Ergebnis.

## 2.5. Videoanalyse

Mithilfe einer Videoanalyse wird untersucht, ob die theoretischen Ergebnisse mit der Praxis übereinstimmen.

### 2.5.1. Versuchsaufbau

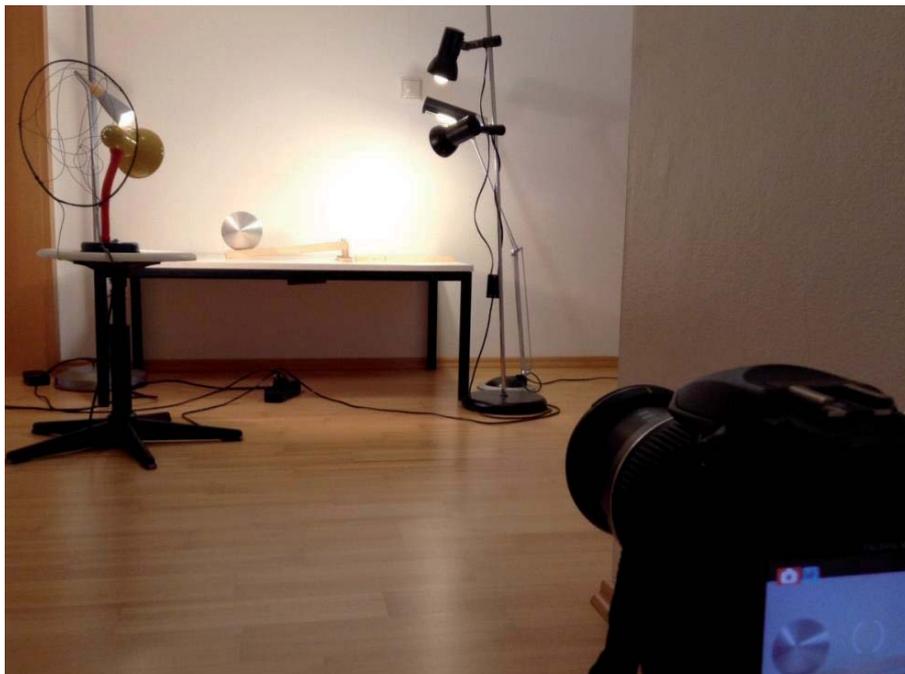


Abb. 5: Versuchsaufbau [selbst erstellt]

Ein Tisch wird mit doppelseitigem Klebeband am Boden befestigt, das V-förmige Schienensystem wird ebenfalls mit doppelseitigem Klebeband auf dem Tisch befestigt, da sich nach einigen Versuchen herausstellte, dass der Doppelkegel mit einer solchen Kraft gegen das Ende der Schienen rollt, dass sich der ganze Versuchsaufbau ohne Befestigung

bewegt.

Die Kamera steht senkrecht zur Winkelhalbierenden der V-förmig angeordneten Schienen. Ein Maßstab (im folgenden Versuch  $0,100\text{ m}$ ) befindet sich auf Höhe der, der Kamera näheren, Schiene. Die Kamera steht möglichst weit (im Versuch etwa  $2,60\text{ m}$ ) vom Schienensystem entfernt und es wird stark hereingezoomt, damit die Linsenverzerrung möglichst gering ausfällt.

In den Versuchen wird der Doppelkegel auf die Spitze der Schienen aufgesetzt und losgelassen ohne, dass der Doppelkegel angestoßen wird.

Der in der Videoanalyse genutzte Doppelkegel hat einen Öffnungswinkel von  $\gamma = 30,86^\circ$  Radius von  $R = 0,0649\text{ m}$ , und eine Höhe von  $h = 0,2172\text{ m}$ .

In der Videoanalyse werden für die Schienen die Winkel  $\alpha = 9,5^\circ$  und  $\beta = 3,7945^\circ$  verwendet.

### 2.5.2. Beweis der Rollbedingung

Um die Rollbedingungen zu verifizieren, werden zwei Winkel festgelegt, sodass man den dritten Winkel variieren kann. Dadurch ergibt sich für den variablen Winkel ein Grenzwinkel. Nach der Theorie rollt der Doppelkegel die Schienen „hinauf“, sofern man den variablen Winkel kleiner als den Grenzwinkel wählt, da er die Rollbedingungen erfüllt. Er rollt die Schienen „hinunter“, wenn man den variablen Winkel größer als den Grenzwinkel wählt, da die Rollbedingungen nicht erfüllt sind. Zeigt auch die Videoanalyse dieses Verhalten des Doppelkegels, sind die Rollbedingungen bewiesen.

Den variablen Winkel muss man nun so wählen, dass

$$(\tan \beta - \tan \alpha \cdot \tan \gamma) < 0$$

$$\tan \beta < \tan \alpha \cdot \tan \gamma$$

In der Videoanalyse werden die Winkel  $\alpha = 9,5^\circ$  und  $\gamma = 30,86^\circ$  festgelegt. Dadurch ergibt sich für  $\beta$  ein Winkel von

$$\beta = \arctan(\tan \alpha \cdot \tan \gamma) = 0,0996626\text{ Rad} = \frac{0,0996626\text{ Rad} \cdot 360^\circ}{2\pi\text{ Rad}} = 5,71^\circ$$

bei  $(\tan \beta - \tan \alpha \cdot \tan \gamma) < 0$ . (vgl. Abb. 6)

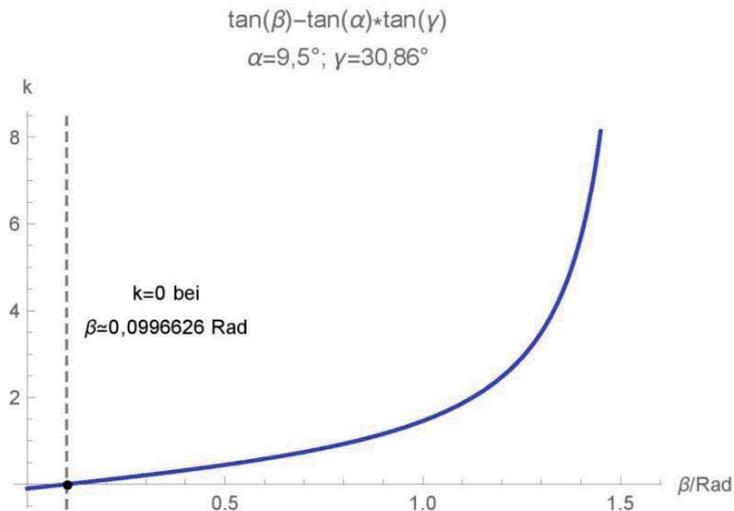


Abb. 6 : Bestimmung des Grenzwinkels  $\beta_G$  [selbst erstellt]

In der Videoanalyse ist zu erkennen, dass sich der Doppelkegel bereits ab einem Winkel von  $\beta = 5,7024^\circ$  nicht mehr bewegt (vgl. Videoanalyse 1). Die Differenz zwischen dem gemessenen Winkel und dem Berechneten ist sehr gering und kann an kleinen Unebenheiten der Schienen oder des Doppelkegels liegen. Je kleiner  $\beta$ , desto schneller rollt der Doppelkegel die Schienen „hinauf“ (vgl. Videoanalyse 2 und 3).

### 2.5.3. Vergleich von $\dot{x}_s^*(t)$ eines gleitenden Doppelkegels mit $v_x(t)$ des Experiments

$$\dot{x}_s^*(t) = \frac{-g \cdot k}{1 + k^2} \cdot t = \frac{-g \cdot (\tan \beta - \tan \alpha \cdot \tan \gamma)}{1 + (\tan \beta - \tan \alpha \cdot \tan \gamma)^2} \cdot t$$

Setzt man die in 2.5.1. genannten Winkel der Videoanalyse sowie für  $t = 0,3003 \text{ s}$  in Formel (11) für  $\dot{x}_s^*(t)$  für den gleitenden Doppelkegel ein:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s^*(t) &= \frac{-9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (\tan(3,7945^\circ) - \tan(9,5^\circ) \cdot \tan(30,86^\circ))}{1 + (\tan(3,7945^\circ) - \tan(9,5^\circ) \cdot \tan(30,86^\circ))^2} \cdot 0,3003 \text{ s} \\ &= 0,09908 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

und vergleicht diesen Wert mit dem der Videoanalyse 3 des rollenden Doppelkegels:

$$v_x = 0,052 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

erkennt man, dass  $\dot{x}_s^*(t)$  größer ist als die Geschwindigkeit  $v_x$ . Der Grund liegt in der Vernachlässigung der Rotationsenergie, da diese bremsend auf den Doppelkegel wirkt. Dies bestätigt folglich die Theorie.

## 2.5.4. Vergleich von $\dot{x}_s(x_s(t))$ eines rollenden Doppelkegels mit $v_{ges}(t)$ des Experiments

$$\dot{x}_s(x) = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot x_s \cdot k}{(1 + k^2) \cdot \left( (R - x_s \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta)^2 + \frac{3}{5} \cdot R^2 \right)}} \cdot (R - x_s \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta)$$

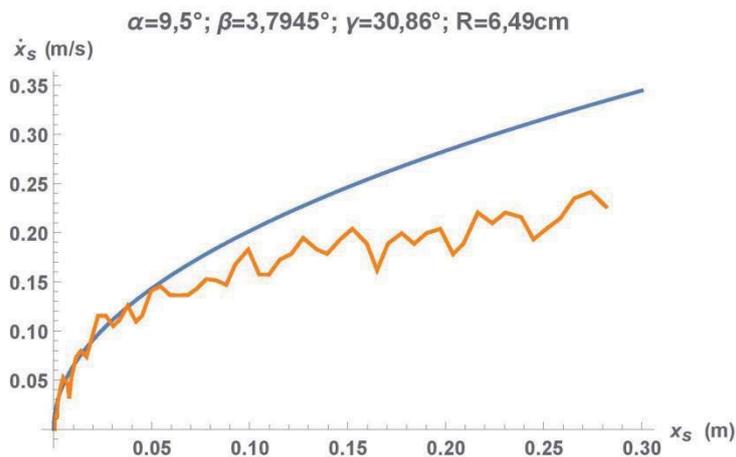


Abb. 7: Vergleich der theoretischen Entwicklung von  $\dot{x}_s(x_s)$  mit den Messwerten aus dem Experiment (vgl. Videoanalyse 3) [selbst erstellt]

Setzt man für die Konstanten und die Variable  $x_s$  passende Werte in Formel (12) ein, damit man das theoretische  $\dot{x}_s(x_s)$  mit dem experimentellen  $v_x(x_s)$  vergleichen kann, erkennt man, dass die Theorie mit der Praxis bis zu 0,05 m extrem genau übereinstimmt und die Abweichungen mit größer werdenden  $x$ - Werten immer stärker abweichen. Gründe dafür liegen in dem Versuchsaufbau und der daraus resultierenden Versuchsauswertung. Zum einen muss man davon ausgehen, dass die Schienen, da sie aus Holz sind, nicht gerade und eben sind. Zusätzlich ist die Oberfläche nicht optimal glatt und erzeugt einen größeren Widerstand. Zum anderen weist der Doppelkegel kleine Gebrauchsspuren auf, was zur Folge hat, dass er nicht achsensymmetrisch ist. Auch die Tatsache, dass das Experiment nicht in einem Vakuum durchgeführt wird, sorgt für geringe Abweichungen von der Theorie. Zudem führt eine Verzerrung im Video vom Experiment, verursacht durch die Linsenverzerrung der Kamera, zu einem Messfehler in der Videoanalyse. Ein weiterer wichtiger Grund ist, dass der Doppelkegel nicht genau senkrecht zu den Schienen aufgesetzt werden kann. Dadurch taumelt der Kegel ein wenig, was starke Auswirkungen auf sein Rollverhalten und seine

Geschwindigkeit hat. Da sich diese Fehler nicht gegenseitig kompensieren können, sondern insgesamt bremsend wirken, entsteht die Abweichung von den theoretischen Werten.

### 2.5.5. Veränderung der Parameter und ihre Auswirkungen

Die Winkel  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  sind im Intervall  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  definiert. Im Folgenden wird die Veränderung der Winkelbeziehung  $k = \tan \beta - \tan \alpha \cdot \tan \gamma < 0$  betrachtet, sobald sich ein Winkel verändert.

k wird größer, wenn

- $\tan \beta$  größer wird:  $\tan \beta$  wird größer, wenn sein Argument größer wird:  $\beta \rightarrow \beta_G$   
oder
- $\tan \alpha \cdot \tan \gamma$  kleiner wird:
  - $\tan \alpha$  wird kleiner, wenn sein Argument kleiner wird:  $\alpha \rightarrow 0$   
und/oder
  - $\tan \gamma$  wird kleiner, wenn sein Argument kleiner wird:  $\gamma \rightarrow 0$

k wird kleiner, wenn

- $\tan \beta$  kleiner wird,  $\tan \beta$  wird kleiner, wenn sein Argument kleiner wird:  $\beta \rightarrow 0$   
und/oder
- $\tan \alpha \cdot \tan \gamma$  größer wird:
  - $\tan \alpha$  wird größer, wenn sein Argument größer wird:  $\alpha \rightarrow \alpha_G$   
oder
  - $\tan \gamma$  wird größer, wenn sein Argument größer wird:  $\gamma \rightarrow \gamma_G$

Um den Effekt des „Aufwärtsrollens“ hervorzuheben, kann man  $\beta$  sehr groß wählen, muss dementsprechend jedoch  $\alpha$  und/oder  $\gamma$  besonders klein wählen. Wählt man für  $\alpha = 30,1^\circ$  und  $\gamma = 30,86^\circ$ , ergibt sich für  $\beta$  nach den Rollbedingungen:

$$0 = \tan \beta - \tan \alpha \cdot \tan \gamma$$

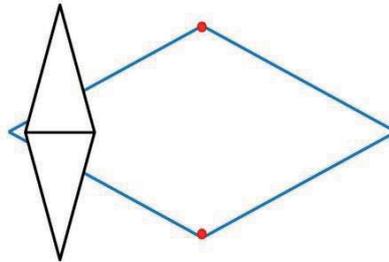
$$\tan \beta = \tan \alpha \cdot \tan \gamma = \tan(30,1^\circ) \cdot \tan(30,86^\circ) = 0,3464$$

$$\beta = 19,11^\circ$$

Der Effekt, dass der Doppelkegel eine so schiefe Ebene „hinaufrollt“ ist auf den ersten Blick nochmals faszinierender (vgl. Videoanalyse 4).

## 2.6. Ausbau des Schienensystems

### 2.6.1. Zwei verbundene V-förmige Schienen

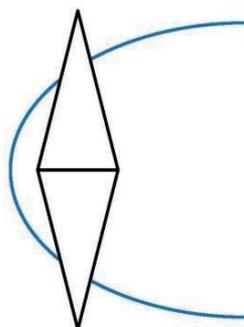


*Abb. 8: An den rot markierten Punkten befindet sich die höchste Stelle der Schienen. Gleichzeitig verläuft die Spiegelachse durch diese beiden Punkte [selbst erstellt]*

Spiegelt man das Schienensystem – sodass der Doppelkegel, nachdem er den höchsten Punkt der Schienen erreicht hat, eine schiefe Ebene herunterrollen könnte, anstatt von den Schienen zu fallen – bedeutet dies, dass der Mittelpunkt des Doppelkegels wieder nach oben rollt. Der Doppelkegel wird dadurch langsamer oszillieren (vgl. [1]), bis er stehen bleibt und die Schienen wieder hinaufrollt.

Da der Kegel aufgrund von auftretender Reibung nicht unendlich weiterrollt, bleibt er nach einer gewissen Zeit an der, für seinen Mittelpunkt tiefste Stelle, stehen. Diese tiefste Stelle ist der höchste Punkt der Schienen, also an der Spiegelachse. Es wirkt, als würde der Doppelkegel auf der Spitze der zusammenlaufenden Schienen balancieren.

### 2.6.2. Parabolische Schienen



*Abb. 9: Die rechte Seite der Schienen ist erhöht [selbst erstellt]*

Parabolische Führungslinien beschreiben eine leichte Kurve, anstatt gerade zu sein. Auch in diesem Schienensystem sind die Schienen höher, je weiter sie sich voneinander entfernen. Der Doppelkegel wird auch dieses Schienensystem „hinaufrollen“, da sich sein Mittelpunkt zu Beginn an einer höheren Position befindet. Die Geschwindigkeit wird zuerst sehr stark zunehmen und dann nahezu konstant verlaufen, da sich  $\Delta y_s$  kaum verändert. Dieses Experiment wird wie eine Art Katapult wirken, da der Doppelkegel zu Beginn sehr schnell wird und dann die Schienen „hinaufgeschossen“ wird.

### 3. Schluss

Der aufwärtsrollende Doppelkegel ist ein faszinierendes physikalisches Spielzeug und trotzdem vielen Menschen unbekannt. Dem weit verbreiteten Geschicklichkeitsspiel „Kugelspiel“, auch genannt Sisyphos, wird das Prinzip des aufwärtsrollenden Doppelkegels zugrunde gelegt. Statt eines Doppelkegels wird bei diesem Spiel eine Kugel auf ein Schienensystem gelegt, bei dem die Schienen, während die Kugel auf ihnen aufliegt, geöffnet und geschlossen werden können. Dabei liegt die Kugel zuerst auf den geschlossenen Schienen. Werden diese langsam geöffnet, rollt die Kugel in Richtung der geöffneten Schienen, da sich der Mittelpunkt der Kugel nicht mehr an seinem tiefstmöglichen Punkt befindet. Werden die Stäbe wieder geschlossen, rollt die Kugel wieder zurück, denn der tiefstmögliche Punkt befindet sich bereits näher der Schienenspitze.

Auch heute noch arbeiten Physiker daran, die vom Doppelkegel zurückgelegte Strecke  $x$  in Abhängigkeit von  $t$  und die Geschwindigkeit  $v$  in Abhängigkeit von  $t$  zu berechnen. Je tiefer man in die Materie des aufwärtsrollenden Doppelkegels eindringt, desto komplexer und faszinierender werden die Berechnungen dieses scheinbar so einfachen physikalischen Spielzeugs.

#### 4. Literaturverzeichnis

- [1] BALTA, Nuri (2002): *New Versions of the Rolling Double Cone*; In: o. Hrsg. ;The Physics teacher; Band 40; Heft 3; S. 156f
- [2] DEMTRÖDER, Wolfgang (2012): *Experimentalphysik 1, Mechanik und Wärme*; 6. Auflage; Berlin, Heidelberg; S. 123 f., Gleichung (4.69) ff.
- [3] DEPARTMENT DER ETH ZÜRICH (Hrsg.): [http://demo2.handshake.ch/1-4-8-antigravitation/?sword\\_list%5B0%5D=antigravitation](http://demo2.handshake.ch/1-4-8-antigravitation/?sword_list%5B0%5D=antigravitation) (unter Beschreibung) aufgerufen am 02.07.2015 um 15:11
- [4] GRAVESANDE, G. J.(1748): *Physices Elementa Mathematica Experimentis Confirmata*; Auflage unbekannt; Leiden
- [5] MEYER, Lothar & SCHMIDT, Gerd-Dietrich (2003): *Physik, Gymnasiale Oberstufe*; DUDEN PAETEC Schulbuchverlag; Berlin, Frankfurt a.M.; S.99-121
- [6] WELLS, Dare (1967): *Schaum's Outline of Theory and Problems of Lagrangian Dynamics with treatment of Euler's Equations of Motion, Hamilton's Equations and Hamilton's Principle*; New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, Sydney, McGraw-Hill Book Company; S.( 85-)86, Formel 5.9

## 5. Einheitenverzeichnis

Die Reihenfolge der Formelzeichen entspricht der in der Arbeit vorkommenden Reihenfolge:

Formelzeichen:	Bedeutung:	Einheit:
1. $x_s$	Vom Doppelkegel zurückgelegte Strecke	$m$
2. $a$	Strecke vom Mittelpunkt des Doppelkegels zum Auflagepunkt des Doppelkegels auf den Schienen	$m$
3. $R$	Radius des Doppelkegels	$m$
4. $\alpha$	Halber Öffnungswinkel der Schienen	$^\circ$
5. $\gamma_s$	Abstand vom Auflagepunkt zur Drehachse	$m$
6. $\gamma$	Halber Öffnungswinkel des Kegels	$m$
7. $h$	Höhe des Auflagepunktes	$m$
8. $s$	Strecke von Spitze des V zur Höhe $h$	$m$
9. $\beta$	Winkel zwischen Boden und Ebene, auf der der Kegel rollt	$m$
10. $H(x_s)$	Bahnkurve des Doppelkegels	$m$
11. $E$	Energie	$kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$
12. $m$	Masse des Doppelkegels	$kg$
13. $v$	Geschwindigkeit	$\frac{m}{s}$
14. $\dot{x}_s(t)$	Geschwindigkeit in x-Richtung	$\frac{m}{s}$
15. $\dot{s}(t)$	Geschwindigkeit in s-Richtung	$\frac{m}{s}$
16. $J$	Trägheitsmoment	$kg \cdot m^2$
17. $\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$\frac{Rad}{s}$
18. $r$	Abrollradius	$m$
19. $g$	Fallbeschleunigung	$\frac{m}{s^2}$
20. $L$	Lagrange-Funktion	$kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$
21. $T$	kinetische Energie	$kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$
22. $V$	potentielle Energie	$kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$
23. $\dot{x}_s^*(t)$	Geschwindigkeit des gleitenden Doppelkegels	$\frac{m}{s}$

## 6. Selbstständigkeitserklärung

Ich, Samira Hatoum, versichere, dass ich diese schriftliche Arbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe und dass ich alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quellen als Entlehnung kenntlich gemacht habe. An dieser Stelle möchte ich Tom Burkart für seine Erläuterungen zum Lagrange-Formalismus danken.

---

Ort, Datum

---

Unterschrift der Schülerin