Schyren-Gymnasium | *Abiturjahrgang*
Pfaffenhofen | *2013/2015*

SEMINARARBEIT

Rahmenthema des Wissenschaftspropädeutischen Seminars:
Komplexe Zahlen

Leitfach:
Mathematik

Thema der Arbeit:
Der Fundamentalsatz der Algebra, Beweise, Geschichte und Bedeutung

Verfasserin:
Elisabeth Meidinger

Kursleiter:
Dr. Hans Kern

Abgabetermin: 04. November 2014

Bewertung	Note	Notenstufen in Worten	Punkte		Punkte
Schriftliche Arbeit				x 3	
Abschlusspräsentation				x 1	
				Summe:	
				Gesamtleistung nach § 61 (7) GSO = Summe:2 (gerundet)	

Datum und Unterschrift des Kursleiters

1 Einleitung: Notwendigkeit des Fundamentalsatzes

Der Fundamentalsatz hat, wie sein Name schon sagt, eine fundamentale Bedeutung in der Mathematik. Um Gleichungen zu lösen, ist dieser Satz unabdingbar. [1, S. 46]

Denn in der Zahlenmenge der komplexen Zahlen sind nicht nur einfache Gleichungen, wie $x^2 - 1 = 0$ oder $2x^2 - x = 0$ lösbar, sondern auch die berühmte Gleichung $x^2 + 1 = 0$. Diese war nämlich mit ein Grund für die Zahlenbereichserweiterung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$.

Doch der Fundamentalsatz beschränkt sich nicht auf Polynome eines bestimmten Grades, sondern löst viel allgemeinere Probleme. [2, S. 80]

Grundlegend können mit Hilfe des Satzes die Nullstellen eines beliebigen Polynoms jedoch nicht berechnet werden. Er sagt laut [1, S. 48] nur aus, dass es Nullstellen gibt.

2 Formulierung des Fundamentalsatzes

Der Fundamentalsatz der Algebra lautet folgendermaßen:

„**Jede Gleichung n-ten Grades (n ≥ 1) der Form**

$$\boldsymbol{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_0 = 0}$$

mit $\boldsymbol{a_n},\ \boldsymbol{a_{n-1}}, \dots, \boldsymbol{a_0} \in \mathbb{C}$ **hat in** $\mathbb{C}$ **mindestens eine Lösung.**“ [1, S. 46]

In Worten ausgedrückt lautet er:

„Die Aussage, dass jede algebraische Gleichung n-ten Grades im Bereich der komplexen Zahlen stets genau n nicht notwendig voneinander verschiedene Lösungen hat, wird allgemein als Fundamentalsatz der Algebra bezeichnet. Der Sachverhalt kann jedoch auch als **Faktorisierungseigenschaft** für das entsprechende Polynom formuliert werden und lautet dann: (…) Jedes Polynom vom Grad n≥1 mit komplexen Koeffizienten kann als ein Produkt von n linearen Faktoren mit komplexen Koeffizienten dargestellt werden.“ [3, S. 283]

Auf die Eigenschaft des Faktorisierens wird im folgenden Abschnitt im Zusammenhang mit dem Zerlegungssatzes eingegangen.

Anmerkung: Es gibt die beiden Aussagen, dass einerseits jedes Polynom n-ten Grades genau n Nullstellen hat, sowie andererseits es zumindest eine Nullstelle hat. Die zweite Aussage ist nur eine Verminderung der Aussagekraft der Ersten und schließt sie jedoch nicht aus.

3 Umformulierung als Zerlegungssatz

Da die Anschaulichkeit der Aussage des Fundamentalsatzes nur begrenzt ist, soll sie an dieser Stelle durch Umformung verdeutlicht werden. Damit kann man aus den gegebenen Gleichungen ganz einfach die **Nullstellen $\boldsymbol{z_1, z_2}$** ... erkennen.

„Jedes Polynom $f(z)$ vom Grad n $(n \geq 1)$ hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen, wobei mehrfache Nullstellen entsprechend oft zu zählen sind.

Sind $z_1, z_{2,}$ ... $, z_n$ die Nullstellen von $f(z)$, so lässt sich $f(z)$ in $\mathbb{C}$ folgendermaßen zerlegen:

$\boldsymbol{f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ \dots \ + a_0 = a_n \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)}$“

[1, S. 46]

Dies sagt auch der sogenannte Zerlegungssatz aus:

> Der Zerlegungssatz besagt, dass „(j)edes Polynom n. Grades (...) in ein Produkt von n Linearfaktoren zerlegt werden (kann)“ [4, S. 130].

Anhand einiger Beispiele soll dieses Zitat nun erklärt werden:

1. Das Polynom $x^2 - 8x + 15 = 0$ lässt sich durch Umformung (beispielsweise mit Hilfe der Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen) in folgende Form zerlegen:

   $$(x - 3) \cdot (x - 5) = 0.$$

   Dadurch sind die Lösungen der Gleichung sofort sichtbar: $x_1 = 3;\ x_2 = 5.$

2. Für das schwierigere Beispiel $x^3 + 10x^2 + 8x - 64 = 0$ wendet man das Verfahren der **Polynomdivision** an.

   Als erstes muss eine Nullstelle gefunden werden, damit weitere ausgerechnet werden können. Diese erste Lösung ist ein Teiler des konstanten Glieds, in diesem Fall ein Teiler von 64. Anbieten würde sich beispielsweise $-2;\ -1; 1; 2$. Probiert man diese Zahlen durch Einsetzen in den Term aus, erhält man nur für die Zahl 2 die Lösung 0. Das bedeutet, dass die erste Nullstelle des Polynoms 2 ist.

   Nun wird diese Lösung im Sinne des Zerlegungssatzes ausgeklammert:

   $$f(x) \cdot (x - 2) = x^3 + 10x^2 + 8x - 64,$$

   wobei in $f(x)$ die restlichen Nullstellen vorhanden sind.

Teilt man das Ursprungspolynom durch die gefundene Nullstelle, kann $f(x)$ ermittelt werden: $(x^3 + 10x^2 + 8x - 64):(x - 2) = f(x)$

Die Rechnung sieht wie folgt aus:

$$
\begin{array}{l}
(\quad x^3 + \ 10x^2 \ + \ \ 8x \ - \ 64 \quad) \ : \text{(x-2)} \ = \ x^2 + 12x + 32 \\
\underline{-(\ x^3 - \ \ 2x^2)} \\
\qquad\qquad 12x^2 \\
\qquad \underline{-(\ 12x^2 \ - \ 24x)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 32x \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(32x \ - \ 64)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Anschließend können die restlichen Lösungen berechnet werden.

Das geht jetzt ganz einfach für den berechneten Term zweiten Grades $x^2 + 12x + 32$:

$$x_{1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32}}{2 \cdot 1} = \frac{-12 \pm 4}{2}$$

Daraus ergeben sich die Lösungen $x_2 = -4$ und $x_3 = -8$.

Nun kann die Gleichung $x^3 + 10x^2 + 8x - 64 = 0$ auch so geschrieben werden:

$$(x-2) \cdot (x+4) \cdot (x+8) = 0.$$

3. Abschließend folgt noch ein Beispiel aus dem Körper der komplexen Zahlen, ebenfalls vom Grad 2: $x^2 - 2x - 8ix + 6i - 15 = 0$ oder auch $x^2 - (2 + 8i)x + 6i - 15 = 0$.

   Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen folgt:

$$x_{1/2} = \frac{2+8i \pm \sqrt{(-(2+8i))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (6i-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{2+8i \pm \sqrt{(4+32i-64) - 24i + 60}}{2} =$$

$$\frac{2+8i \pm \sqrt{-60+32i+60-24i}}{2} = \frac{2+8i \pm \sqrt{8i}}{2} = 1 + 4i \pm \sqrt{2i}\,.$$

Da die Zahl $2i$ in Polarkoordinaten als $2E(\frac{\pi}{2})$ dargestellt werden kann, ergibt sich für $\sqrt{2i}$ folgende Darstellung:

$$2^{\frac{1}{2}} E\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} E\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Daraus entsteht die kartesische Koordinate $z = 1 + i$.

Für das errechnete Ergebnis ergibt sich nun $1 + 4i \pm (1 + i)$. Daraus erhält man $x_1 = 1 + 4i + 1 + i = 2 + 5i$ und $x_2 = 1 + 4i - 1 - i = 3i$.

Die Gleichung $x^2 - 2x - 8ix + 6i - 15 = 0$ kann somit faktorisiert werden in:

$$\big(x - (2 + 5i)\big) \cdot (x - 3i) = 0.$$

3.1 Begründung der Gleichwertigkeit und Darstellung komplexer Lösungen

Nun soll die in Kapitel 3 aufgestellte Gleichung bewiesen werden:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ \dots + a_0 = a_n \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$$

3.1.1 Erster Schritt

Man beginnt mit der Festlegung, dass z_1 einer Nullstelle des Polynoms entspricht, da nach dem Fundamentalsatz die Funktion $f(z)$ (siehe oben) mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ haben muss. [1, S. 46]

3.1.2 Zweiter Schritt

Es soll gelten: $$f(z) = (z - z_1) \cdot g_1(z)$$

wobei $g_1(z)$ nach dem Potenzgesetz einen Grad von $n - 1$ hat, da $f(z)$ ein Polynom n. Grades ist.

Anders ausgedrückt: Wenn man $f(z)$ durch $(z - z_1)$ teilt, bleibt kein Rest mehr übrig (vgl. [1, S. 46]).

Gegenannahme: Man nimmt an, dass bei der Division von $f(z)$ durch $(z - z_1)$ nicht nur das Polynom $g(z)$ sondern noch ein Rest entsteht, den man als Restpolynom q bezeichnet.

Dann sieht die Gleichung folgendermaßen aus:

$$f(z) = (z - z_1) \cdot g_1(z) + q.$$

Jetzt wird die nach Schritt 1 bestimmte Nullstelle z_1 eingesetzt und die Gleichung gemäß der Definition einer Nullstelle gleich 0 gesetzt. Dadurch ergibt sich für das Restpolynom q durch Umformen Folgendes:

$$0 = f(z_1)$$
$$0 = (z_1 - z_1) \cdot g_1(z_1) + q$$
$$0 = 0 \cdot g_1(z) + q$$
$$0 = q$$

Allgemein formuliert bedeutet das, dass bei der Division kein Rest entsteht, (da $q = 0$)! [1, S. 46-47]

3.1.3 Dritter Schritt

Somit wurde die Umformung

$$f(z) = (z - z_1) \cdot g_1\,(z)$$

(mit $g_1\,(z)$ vom Grad $n - 1$) bestätigt.

Betrachtet man die Variable $g_1\,(z)$ der Gleichung, ergibt sich wegen des Zerlegungssatzes:

$$g_1(z) = (z - z_2) \cdot g_2\,(z)$$

und z_2 ist wegen des Fundamentalsatzes auch eine Nullstelle.

Mit dieser Gleichung kann abermals die Vorgehensweise in Schritt 2 durchgeführt werden und dabei ergibt sich:

$$f(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot g_2\,(z)$$

mit $g_2(z)$ als Polynom vom Grad $n - 2$ und keinem zusätzlichen Rest.

Wiederholt man diese in [1, S. 47] formulierte „Zerlegung" solange, bis man beim „konstanten Polynom $g_n(z)$ (…) angelangt ist" [1, p. 47] und $g_n(z) = a$ festlegt, erhält man:

$$f(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n) \cdot a.$$

Wird jetzt die rechte Seite wieder ausmultipliziert, sieht man allgemein, dass a der Koeffizient von z_n ist. Zur Veranschaulichung wird dieser Schritt mit den Nullstellen z_1 und z_2 durchgeführt (also mit der Gleichung $f(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot a$ und $n = 2$):

$$f(z) = a \cdot (z^2 - zz_2 - zz_1 + z_1z_2) = az^2 - azz_2 - azz_1 + az_1z_2$$
$$= az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1z_2$$

Der Koeffizient von z^2 ist somit a, das bedeutet $a = a_n$ in der Schreibweise von Abschnitt 3.1. Allgemein ist a der Koeffizient des Polynomterms mit der höchsten Potenz.

Jetzt sind alle Nullstellen $z_1, z_2 \dots, z_n$ Nullstellen von $f(z)$. Da es nicht zwingend notwendig ist, dass die Nullstellen voneinander verschiedene Werte besitzen, können allgemein Nullstellen auch mehrfach auftreten, sogenannte **m-fache Nullstellen**. Gezeigt ist insgesamt jedoch, dass „jedes Polynom n-ten Grades mindestens n Nullstellen besitzt"(aus [1, S. 47]).

3.1.4 Vierter Schritt

Nullstelle: Setzt man nun eine beliebige Nullstelle z_k $(k = 1, \dots, n)$ ein, wird ein Faktor der Gleichung null, damit auch das Polynom $f(z)$ und eine Nullstelle ist gefunden.
Dafür gilt es noch zu beweisen, dass alle $z_1, z_2 \dots$ die **einzigen Nullstellen** der Gleichung
$f(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n) \cdot a_n$ sind.
Dafür nehmen wir an, dass z_{n+1} auch eine Nullstelle dieser Gleichung ist, die aber mit keiner gefundenen Nullstelle $z_1, z_2 \dots$ identisch ist.
Durch Einsetzen entsteht:

$$f(z_{n+1}) = (z_{n+1} - z_1) \cdot (z_{n+1} - z_2) \cdot \dots \cdot (z_{n+1} - z_n) \cdot a_n.$$

Da keiner der einzelnen Faktoren gleich 0 ist, wird auch das Produkt nicht null. Wenn aber gilt $f(z_{n+1}) \neq 0$ ist z_{n+1} auch keine Nullstelle der Funktion. Das bedeutet, dass nicht mehr als n Nullstellen existieren. [1, S. 47]

Abschließend kann man somit sagen, dass die Umformung

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = a_n \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$$

gültig ist und es n komplexe Lösungen gibt. Die Nullstellen müssen jedoch nicht voneinander verschieden sein. [1, S. 47]

4 Geschichte

Das sogenannte Nullstellenproblem beschäftigte die Mathematiker schon seit der Antike. Die Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse, also die sogenannten Nullstellen, eines Polynoms ersten und zweiten Grades konnten schon sehr früh bestimmt werden. Sogar Polynome vom Grad 3 konnte der arabische Mathematiker Omar Chajjman (ca. 1025 – 1122) geometrisch konstruieren [1, S. 48].
Bereits im 17. Jahrhundert stellten Mathematiker die Formel zur Lösung von Polynomen des Grades 2 auf. Damit aber alle Gleichungen dieser Art zwei Lösungen besitzen, müssen auch

negative Zahlen unter der Wurzel zugelassen werden. Das geschieht bei der Zahlenmengenbereichserweiterung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$. Damit erhält man insgesamt immer mehr Lösungen und die Idee entstand, dass Polynome vom Grad n vielleicht sogar unendlich viele Nullstellen haben, die alle in $\mathbb{C}$ liegen. [1, S. 48]

Diskutiert wurde diese Idee auch bereits am Anfang des 17. Jahrhunderts: Der Nürnberger Rechenmeister Peter Roth schrieb „in seinem (1608 erschienenen) Buch ‚Arithmetica Philosophica. Oder schöne neue wolgegründete Überauß Künstliche Rechnung der Coß oder Algebrae' (…), dass eine Gleichung n-ten Grades höchstens n Nullstellen haben könne" [5, S. 2-3]. Die Aussage war zwar unbewiesen, jedoch ist sie eine erste Formulierung des Fundamentalsatzes.

Nur gut 20 Jahre später bemerkte der niederländische Mathematiker Albert Girard, dass die Anzahl der Lösungen einer Gleichung mit der Zahl des höchsten Exponenten übereinstimmt. Trotz der Konkretisierung des Gedankens des Fundamentalsatzes, konnte er seine Aussage aber auch nicht beweisen. [5, S. 3]

5 Beweis nach d´ Alembert und Gauß

Der Beweis bestätigt die Aussage des Fundamentalsatzes, dass jedes Polynom

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_0$$

in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle hat.

D` Alemberts **Leitgedanke** war, „dass der Betrag jedes Polynoms ein Minimum hat (…), dass (…) null sein muss." (aus [5, S. 3]). Die dabei entstandene Nullstelle kann dann oft hintereinander „als Linearfaktor abgespalten werden" [5, S. 3]. Zuletzt entsteht dadurch der Fundamentalsatz.

Dabei kann dieser Beweis in **drei Schritten** dargelegt werden.

5.1 Erster Schritt

Statt mit der Funktion $f(x)$ zu arbeiten, beschäftigt man sich mit dem Betrag dieser Funktion, also $|f(x)|$. Der Betrag bewirkt hierbei, dass die Funktion „nicht negative, reelle Werte" [1, S. 49] annimmt.

5.2 Zweiter Schritt

Grundannahme dieses Beweises ist es nun, dass es „zu jedem c mit $f(c) \neq 0$ und damit $|f(c) > 0|$ eine Zahl d gibt, so dass

$$|f(c+d)| < |f(c)| \tag{I}$$

gilt". [1, S. 49]

Also: Zu jeder Zahl c mit $f(c) \neq 0$ kann man eine Zahl $c + d$ finden, „deren Funktionswert dem Betrage nach kleiner ist" [1, S. 49] und somit näher an Null liegt.

Ziel und Aufgabe des folgenden dritten Schrittes ist es nun, diese Aussage zu bestätigen [1, S. 49].

5.3 Dritter Schritt

5.3.1 Gegenannahme

Als Gegenannahme beginnt man damit, dass $f(z)$ keine Nullstellen hat, also dass $|f(z)|$ den „kleinsten Wert (annehmen kann) (...), der größer als 0 ist" [1, S. 49]. Dadurch entsteht eine Zahl, durch die der Funktionswert zwar den kleinsten Betrag hat, der aber immer noch größer als 0 ist und damit keine Nullstelle ist. Diese kleinste Zahl wird als c bezeichnet.

So gilt für alle z aus $\mathbb{C}$:

$$|f(c)| \leq |f(z)|.$$

Durch die Voraussetzung, dass $f(c) \neq 0$, und das in Schritt 2 eingeführte d gilt:

$$|f(c+d)| < |f(c)|.$$

Diese Zahl d verkleinert durch Addition zu c den Betrag. Es gilt somit:

$$|f(c+d)| < |f(c)| \leq |f(z)|$$

Dadurch entsteht ein Widerspruch, weil plötzlich c (aus Schritt 3.1) doch nicht mehr die kleinste Zahl ist, obwohl z für alle Zahlen steht. Damit ist die Annahme von Schritt 3 widersinnig und die **Behauptung**, es gäbe keine Nullstelle, **widerlegt**.

Damit muss nur noch Ungleichung (I) bestätigt werden. [1, S. 49]

5.3.2 Beispiel zur Bestätigung der Annahme aus Schritt 2

Das Beispiel Polynom sei nun

$$f(z) = z^2 + z + 1.$$

Setzt man statt z nun $z + d$ ein, so gilt:

$$f(z + d) = (z + d)^2 + (z + d) + 1 = z^2 + 2zd + d^2 + z + d + 1$$
$$= z^2 + z + 1 + 2dz + d^2 + d = f(z) + d(d + 2z + 1).$$

Jetzt muss diese Zahl d so ausgewählt werden, dass

$|f(z + d)| < |f(z)|$ mit $|f(z + d)| = |f(z) + d(d + 2z + 1)|$ gilt

(Analog gilt dann für $c = z$: $|f(c + d)| < |f(c)|$).

Ein **Beispiel** für z soll das Verstehen erleichtern:

Für $z = -0{,}5$ gilt:

$$\underline{|f(-0{,}5 + d)| < |f(z)|}$$

Mit $$|f(-0{,}5 + d)| = |f(-0{,}5) + d(d + 2 \cdot (-0{,}5) + 1)|$$

$$|f(-0{,}5 + d)| = |f(-0{,}5) + d^2|$$

Mit $$f(-0{,}5) = (-0{,}5)^2 - 0{,}5 + 1 = 0{,}75$$ gilt dann:

$$|f(-0{,}5 + d)| = |0{,}75 + d^2|$$

Da für d auch die komplexen Zahlen zur Verfügung stehen, kann d^2 auch negative Werte ergeben.

Ein Beispiel wäre $d = \sqrt{0{,}75}i$ und damit $d^2 = -0{,}75$. Setzt man dieses d in die obige Gleichung ein entsteht:

$$\left|f\left(-0{,}5 + \sqrt{0{,}75}i\right)\right| = |0{,}75 - 0{,}75| = 0.$$

Zufälligerweise hat man damit sogar die Nullstelle von $f(x)$ gefunden.

Das Augenmerk liegt für diesen Beweis jedoch nur darauf, die Gleichung (I) zu erfüllen, da die Berechnung von d sich nicht einfach gestalten wird. [1, S. 49]

5.3.3 Allgemeine Betrachtung und Weiterführung des Beispiels

Allgemein wird bei diesem Beweis ein beliebiges Polynom $f(z)$ betrachtet, bei dem zur Vereinfachung $a_n = 1$ festgelegt wird.

Daraus ergibt sich dann folgender Ausdruck:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_0 = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_0 \qquad \text{(II)}$$

Da schließlich d aus Gleichung (I) gesucht wird, setzt man $c + d$ für z in Gleichung (II) ein und vereinfacht dann gemäß [1, S. 50]:

$$f(c + d) = (c + d)^n + a_{n-1}(c + d)^{n-1} + \cdots + a_1(c + d)^1 + a_0 = \cdots \qquad \text{(III)}$$

5.3.4 Ausblick: Pascalsche Zahlen

Um die Gleichung n-ten Grades zu lösen, sind die **Pascalschen Zahlen** hilfreich.

Darstellbar sind sie in folgender Pyramide:

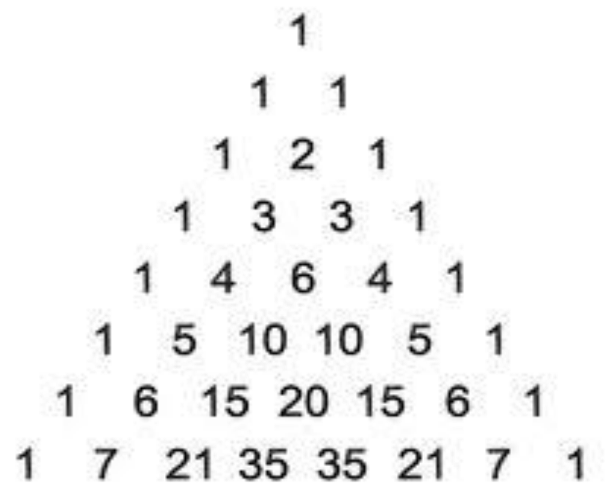

Abbildung 1: Pascalsche Zahlen [6]

Entstehung: Die Zahlenfolgen im Dreieck entstehen jeweils durch die Addition der beiden darüber liegenden Ziffern, was an der folgenden Grafik verdeutlicht werden soll. Die äußersten Zahlen haben dadurch nur einen Summanden und sind folglich immer 1.

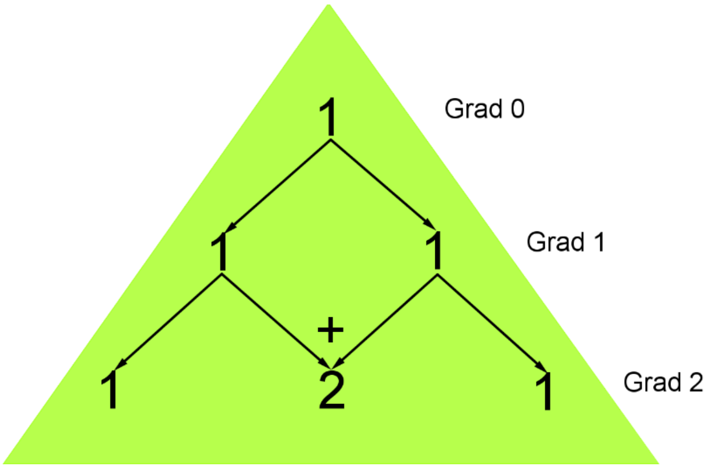

Abbildung 2: Funktionsweise des Pascalschen Dreiecks [selbst erstellt]

Im Folgenden wird diese **Anwendung** auf Binomische Formeln bezogen, um dann abschließend Gleichung (III) aus Abschnitt 5.3.3 zu lösen.

Die erste Zeile wird für das Polynom 0. Grades angewandt, also für $(a+b)^0$.
Die zweite Zeile gilt dem Grad 1 des eben genannten Polynomtyps: $(a+b)^1$.
Diese Regelmäßigkeit setzt sich dann in allen folgenden Reihen durch.
Beispielsweise wird die dritte Zeile betrachtet, um die Lösung eines Polynoms anhand des Dreiecks zu erklären.
Es gilt: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Da das Polynom mit **Grad 2** zur dritten Zeile des Dreiecks gehört, ergibt sich die Zahlenkombination 1,2,1 die auch im Term wieder auffindbar ist:

$(a+b)^2$	1	2	1
	$1 \cdot a^2$	$2 \cdot ab$	$1 \cdot b^2$

Gleiches lässt sich auch mit dem Polynom **7.Grades** darstellen:

$(a+b)^7$	1	7	21	35	35	21	7	1
	$1 \cdot a^7$	$7 \cdot a^6 b$	$21 \cdot a^5 b^2$	$35 \cdot a^4 b^3$	$35 \cdot a^3 b^4$	$21 \cdot a^2 b^5$	$7 \cdot ab^6$	$1 \cdot b^7$

Um die Richtigkeit dieser Rechnungsmethode zu beweisen, folgt nun ein **Zahlenbeispiel**:

Annahme: $a = 1; b = 2$

Folge: $(a+b)^7 = 3^7 = 2187$

$$a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$
$$= 1 + 14 + 84 + 280 + 560 + 672 + 448 + 128 = 2187$$

Daraus folgt durch weiteres Rechnen für das Polynom **n-ten Grades**:

$(a+b)^n$	1	n	…	n	1
	$1 \cdot a^n$	$n \cdot a^{n-1}b$	…	$n \cdot ab^{n-1}$	$1 \cdot b^n$

Schlussfolgerung: $\boxed{(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \cdots + nab^{n-1} + b^n}$

5.3.5 <u>Anwendung der Pascalschen Zahlen</u>

Gleichung (III) kann nun gemäß [1, S. 50] umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
f(c+d) &= (c+d)^n + a_{n-1}(c+d)^{n-1} + \cdots + a_1(c+d)^1 + a_0 = \\
&= 1 \cdot c^n + n \cdot c^{n-1}d + \cdots + n \cdot cd^{n-1} + 1 \cdot d^n + a_{n-1}(1 \cdot c^{n-1} + (n-1) \cdot \\
&\quad c^{n-2}d + \cdots + (n-1) \cdot cd^{n-2} + 1 \cdot d^{n-1}) + \cdots + a_1c + a_1d + a_0 = \\
&= c^n + nc^{n-1}d + \cdots + ncd^{n-1} + d^n + a_{n-1}c^{n-1} + a_{n-1}(n-1)c^{n-2}d + \cdots + \\
&\quad a_{n-1}(n-1)cd^{n-2} + a_{n-1}d^{n-1} + a_1c + a_1d + a_0 = \\
&= c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1c + a_0 + d^n + ncd^{n-1} + a_{n-1}d^{n-1} + \cdots + a_1d = \\
&= c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1c + a_0 + d^n + (nc + a_{n-1})d^{n-1} + \cdots + a_1d
\end{aligned} \tag{IV}$$

Im letzten Schritt wurde die Gleichung (IV) nach den Variablen c und d sortiert und kann jetzt in zwei getrennten Teilen betrachtet werden:

$$f(c+d) = \underbrace{\boxed{c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1c + a_0}}_{f(c)} + \underbrace{\boxed{d^n + (nc + a_{n-1})d^{n-1} + \cdots + a_1d}}_{e(c,d)}$$

Vergleicht man diesen ersten Summanden mit dem oben aufgeführten $f(z)$ fällt auf, dass er das gleiche ist: $\boldsymbol{f(z)} = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$.	Der zweite Summand ist ein Polynom vom Grad n. Um ihn später wieder leichter zu erkennen, wir es als $\boldsymbol{e(c,d)} = d^n + (nc + a_{n-1})d^{n-1} + \cdots + a_1d =$

Lediglich die Variable c statt z wurde eingeführt.	$d^n + b_{n-1}d^{n-1} + \cdots + b_1 d$ bezeichnet. Wie $b_{n-1}; \ldots ; b_1$, also kurz b_i, genau aussieht ist dabei unwichtig. Ein paar der b_i können auch 0 sein. Nun wird eine kleinste Zahl $\boldsymbol{k}$ definiert, deren Koeffizienten $b_k \neq 0$ und $k\epsilon\mathbb{N}$ ist.

Ausgehend von den Erkenntnissen bezüglich des zweiten Summanden, können jetzt zwei Fälle für k unterschieden werden:

1. Fall: $k = n$

In $e(d)$ eingesetzt ergibt das:

$e(d) = d^k + b_{k-1}d^{k-1} + \cdots + b_1 d.$

Es bleibt dann nach [1, S. 50] übrig: $e(d) = d^k = d^n$.

2. Fall: $k < n$

Anhand eines Beispiels wird dieser Fall erläutert. Betrachtet wird wieder nur: $e(d) = d^k$.

Annahme: $n = 2k$

Folge: $d^n = d^{2k} = (d^k)^2 = d^k \cdot d^k$

$d^{n-1} = d^{2k-1} = d^{2k} : d = (d^k \cdot d^k) : d = d^k \cdot (d^k : d)$

$d^{n+1} = d^{2k+1} = d^{2k} \cdot d = d^k \cdot (d^k \cdot d)$

…

Zu erkennen ist, dass für jedes Beispiel d^k am Ende ausgeklammert werden kann. Der übriggebliebene Rest Term wird $r(d)$ genannt.

Es ergibt sich nun für Fall 2: $e(d) = d^k \cdot r(d)$.

Betrachtet man jetzt **beide Fälle** zusammen in Beachtung der Ausgangsgleichung erhält man:

$$f(c+d) = f(c) + d^k \cdot r(d). \tag{V}$$

Anmerkung:

Es kann nur diese beiden Fälle geben, da nach der Definition im oberen Kasten k die kleinste Zahl ist und n dadurch nur gleich groß oder größer sein kann.

Weiterhin muss noch gemäß [1, S. 50] gelten: $r(0) = b_k \neq 0$.

Jetzt wird Ungleichung (I) wieder aufgegriffen, weiter umgeformt und möglichst vereinfacht:

$$|f(c+d)| < |f(c)|$$

Gleichung (V) eingesetzt in $|f(c+d)|$:

$$|f(c+d)| = |f(c) + d^k \cdot r(d)| \tag{VI}$$

Da hier das $<$-Zeichen auftaucht, bietet sich die **Dreiecksungleichung** an. In diesem Fall wird diese für komplexe Zahlen angewendet, die lautet: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Jetzt kann Gleichung (VI) mit Hilfe der oben angeführten Bedingung $r(0) = a_k \neq 0$ und dem Summanden $d^k r(0) - d^k r(0)$ weiter vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} |f(c+d)| &= |f(c) + d^k \cdot r(d)| \\ &= |f(c) + d^k \cdot r(d) + [d^k r(0) - d^k r(0)]| \\ &= |f(c) + d^k r(0) + d^k \cdot r(d) - d^k r(0)| \end{aligned}$$

Nun wird die oben beschriebene Dreiecksungleichung angewendet:

$$|f(c+d)| \leq |f(c) + d^k r(0)| + |d^k \cdot r(d) - d^k r(0)|$$

$$|f(c+d)| \leq |f(c) + d^k r(0)| + |d^k| \cdot |r(d) - r(0)| \tag{VII}$$

Da Ungleichung (I) zu zeigen ist, muss die rechte Seite von Ungleichung (VII) mit $|f(c)|$ vergleichbar sein. Dafür wird (VII) „als Bruchteil(…) von $|f(c)|$“ [1, S. 50] im Folgenden dargestellt.

5.3.6 Erste Voraussetzung für Variable d

Um den ersten Summanden von (VII) zu umschreiben, definiert man eine neue Variable h, für die gilt: $d^k r(0) = -hf(c)$ mit $0 < h < 1$ und $h \in \mathbb{R}$.

Daraus folgt durch Einsetzten in den ersten Summanden von (VII) und Ausklammern:

$$|f(c) + d^k r(0)| = |f(c) - hf(c)| = (1-h)|f(c)|. \qquad \text{(VIII)}$$

Aus der Definition von h folgt für d:

$$\boldsymbol{d^k = \frac{-hf(c)}{r(0)}} \qquad \text{(IX)}$$

5.3.7 Zweite Voraussetzung für Variable d

Um den zweiten Summanden anders darzustellen, muss man $|r(d) - r(0)|$ „nach oben abschätzen“ [1, S. 50] können (in diesem Fall nur nach oben, weil mit dem Betrag gerechnet wird). Die Abschätzung beträgt hierbei $\frac{|r(0)|}{2}$.

Erklärung: Laut [1, S. 50] gibt es eine reelle, positive Zahl p durch die für alle d mit $|d| < p$ gilt:

$$|r(d) - r(0)| < \frac{|r(0)|}{2} \qquad \text{(X)}$$

Wegen $|d| < p$ gilt auch:

$$\boldsymbol{|d^k| < p^k} \qquad (p \geq 0) \qquad \text{(XI)}$$

5.3.8 Abschließender Beweis des Fundamentalsatzes

Um den Fundamentalsatz zu beweisen, muss Ungleichung (I) bestätigt werden.
Für die Variable d müssen die beiden Voraussetzungen, dargestellt in (IX) und (XI), gleichzeitig erfüllt sein.

Aufgrund von Gleichung (IX) und Ungleichung (XI) folgt: $\boldsymbol{\left|\frac{-hf(c)}{r(0)}\right| < p^k}$.

Daraus ergibt sich durch Umformung:

$$|-hf(c)| < p^k \cdot |r(0)|$$

$$|-h| < \left|\frac{r(0)}{f(c)}\right| p^k$$

$$h < \left|\frac{r(0)}{f(c)}\right| p^k \qquad \text{wegen } 0 < h < 1$$

Nun soll Ungleichung (VII) weiter vereinfacht werden. Die Summe soll dabei $|f(c)|$ ergeben.

$$|f(c+d)| \le \underbrace{|f(c)+d^k r(0)| + |d^k| \cdot |r(d)-r(0)|} \qquad \mathbf{=} \qquad \underbrace{= |f(c)|}$$

Man ersetzt den linken Summanden durch Gleichung (VIII):

$$|f(c+d)| \le (1-h)|f(c)| + |d^k| \cdot |r(d)-r(0)|$$

Der erste Faktor des zweiten Summanden wird durch Gleichung (IX) ausgedrückt:

$$|f(c+d)| \le (1-h)|f(c)| + \left|\frac{-hf(c)}{r(0)}\right| \cdot |r(d)-r(0)|$$

Mit Hilfe der Ungleichung (X) wird durch Ersetzen des zweiten Faktors des zweiten Summanden aus dem $\le$-Zeichen ein $<$-Zeichen.

$$|f(c+d)| < (1-h)|f(c)| + \left|\frac{-hf(c)}{r(0)}\right| \cdot \frac{|r(0)|}{2}$$

Jetzt wird der Term **vereinfacht**.

$$|f(c+d)| < (1-h)|f(c)| + \frac{|-hf(c)|}{2}$$

$$|f(c+d)| < (1-h)|f(c)| + \frac{h}{2}|f(c)|$$

Nun wird $|f(c)|$ wird ausgeklammert:

$$|f(c+d)| < \left(1-\frac{h}{2}\right)|f(c)|$$

Für sehr kleine Werte für h nähert sich der Term $(1-\frac{h}{2})$ dem Wert 1.

$$|f(c+d)| < 1 \cdot |f(c)|$$

Also schließlich:

$$|f(c+d)| < |f(c)|$$

Damit sind Ungleichung (I) und dadurch auch der ganze Beweis erbracht.

Nun ist der Fundamentalsatz der Algebra bewiesen. [1, S. 51]

Dieser Beweis beruht auf d´Alembert, der seinen 1746 ausgesprochenen Fundamentalsatz der Algebra beweisen wollte. Das gelang ihm aber nicht vollständig und so komplettierte Gauß den Beweis 1799. [3, S. 111-112]

6 Geschichte der verschiedenen Beweise

Seit es den Fundamentalsatz gibt oder bewusst von ihm Gebrauch genommen wird, sind Mathematiker am Beweis dieses Satzes interessiert. Bereits im 17. Jahrhundert versuchte man sich daran, doch erst um 1800 gelang es den Mathematikern schlüssige und nachvollziehbare Beweise zu entwerfen. Bis heute gibt es ungefähr 200 davon.
Ein herausragender Mathematiker, der sich viel mit der Zahlenmenge $\mathbb{C}$ auseinandersetzte, lieferte 1749 sogar zwei Beweise. Leonard Eulers Ansätze sind jedoch nicht ganz logisch, dienten jedoch weiteren Mathematikern als Basis ihres Beweises. 1795 gelang der erste richtige und in sich schlüssige Beweis.
Carl Friedrich Gauß schaffte es drei Beweise des Fundamentalsatzes (von 1799 bis 1849) zu entwerfen, die in der Mathematik ein hohes Ansehen genießen, auch wegen ihrer Komplexität. [1, S. 51]

7 Ausblick: Bedeutung und Anwendung des Fundamentalsatzes der Algebra

Der Fundamentalsatz ist nicht nur theoretisch schön anzuschauen, sondern hat auch einen Nutzen, auf den sogar in der Schule zurückgegriffen wird, ohne ihn explizit zu nennen [8, S. 21]. Denn Nullstellen eines Graphen spielen schon in den Anfangsjahren eines Mathematikschülers eine Rolle. Im Grunde genommen sagt der Fundamentalsatz aus, dass ein Polynom Nullstellen besitzt, welche herausfindbar sind durch Faktorisieren des Terms. Somit ist dieser Satz schon jüngeren Schülern insgeheim bekannt.

Doch um den Fundamentalsatz auch praktisch zu zeigen, folgen nun Beispiele der Anwendung des Satzes.

7.1 1. Beispiel

Das Polynom $x^2 - x + 1 = 0$ kann in zwei Zahlenmengen betrachtet werden. Beginnt man mit der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ kann man mit Hilfe der Diskriminante der quadratischen Gleichung herausfinden, wie viele Lösungen die Gleichung haben muss:

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$

Da die Diskriminante < 0 ist, existieren in $\mathbb{R}$ keine Lösungen.

Der Fundamentalsatz jedoch gibt vor, dass es 2 nicht zwingend voneinander verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$ gibt. Also prüfen wir die Lösungsanzahl in $\mathbb{C}$ anhand der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3i^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$L = \left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right\}$$

Dieses Ergebnis stimmt auch mit der Aussage des Fundamentalsatzes überein. Bemerkenswert ist, dass in $\mathbb{R}$ keine Lösungen bestimmbar sind, in $\mathbb{C}$ aber schon.

7.2 2. Beispiel

Dieses Beispiel stammt aus der Quelle [9, S. 26].

Auch bei der Gleichung $z^3 = 8$ kann die Anzahl der Lösungen in $\mathbb{R}$ mit der in $\mathbb{C}$ verglichen werden.

$\mathbb{R}$: Da $z_1 = \sqrt[3]{8} = 2$, gibt es in $\mathbb{R}$ eine Lösung!

$\mathbb{C}$: Durch Ausprobieren erhält man, dass $(-1 \pm \sqrt{3}i)^3 = 8$ ist. Daraus ergeben sich die weiteren beiden Lösungen $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ und $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$!

Der Fundamentalsatz sagt also richtig aus, dass es (da $n = 3$) drei (nicht zwingend voneinander verschiedene) Lösungen geben muss.

$$L = \{2;\ -1 + \sqrt{3}i; -1 - \sqrt{3}i\}$$

7.3 3. Beispiel

Schließlich soll auch die komplizierte Gleichung $z^3 - 3z^2 + z - 3 = 0$ untersucht werden.

Durch Ausprobieren kommt man in $\mathbb{R}$ auf die Lösung $z_1 = 3$. Die Probe beweist dieses Ergebnis: $3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 - 3 = 27 - 27 + 3 - 3 = 0$

Da der Fundamentalsatz aussagt, dass es aber insgesamt drei Lösungen gibt, wendet man sich auch der Zahlenmenge der komplexen Zahlen zu, um die fehlenden zwei Lösungen zu finden. Wiederum durch Ausprobieren erhält man $z_2 = i$ und $z_3 = -i$. Auch hier soll als Beweis die Probe durchgeführt werden:

$z_2 = i \;\rightarrow\; i^3 - 3 \cdot i^2 + i - 3 = -i + 3 + i - 3 = 0$

$z_3 = -i \;\rightarrow\; (-i)^3 - 3 \cdot (-i)^2 - i - 3 = i + 3 - i - 3 = 0$

$$L = \{3;\ -i; i\}$$

8 Literaturverzeichnis

[1] K. Reiss und G. Schmieder, Basiswissen Zahlentheorie, Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 2. Auflage, 2007.

[2] R. Courant und H. Robbins, Was ist Mathematik?, Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag, 1962.

[3] H.-W. Alten, A. Djafari Naini, M. Folkerts, H. Schlosser, K.-H. Schlote und H. Wußing, 4000 Jahre Algebra - Geschichte, Kulturen, Menschen, Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[4] D. H. Dittmann, Algebraische Strukturen und Gleichungen, München: Bayrischer Schulbuch-Verlag München, 1974.

[5] B. Schwarz und J. Franz, Fundamentalsatz der Algebra, Philipps-Universität Marburg: Skript, 2009/2010.

[6] 3d-meier.de, „http://www.3d-meier.de/tut10/Bilder/Pascal0.gif," [Online]. [Zugriff am 19. August 2014].

[7] H. Dörrie, Triumph der Mathematik - Hundert berühmte Probleme aus zwei Jahrhunderten mathematischer Kultur, Würzburg: Physica-Verlag 5. Auflage, 1958.

[8] P. Kramer und B. Waldmüller, Der Körper C der komplexen Zahlen, Phasenplots und der Fundamentalsatz der Algebra, Söderblom-Gymnasium, 2012.

[9] F. Buckel, „Komplexe Zahlen," in *Teil 3: Wurzeln ziehen, Einheitswurzeln, Kreisteilungsgleichungen, Potenzgleichungen, Beliebige Gleichungen*, Internatsgymnasium Schloß Torgelow, Skript, 2003.

„Ich habe diese Seminararbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benützt“

Pfaffenhofen, den

Ort Datum Unterschrift