Städt. Heinrich-Heine-Gymnasium

Seminararbeit
aus dem Fach
Mathematik

Thema:
Einführung in die kombinatorische Spieltheorie mit anschließender Betrachtung von Lösungsalgorithmen am Beispiel „Vier gewinnt“

Verfasser: **Markus Müller**
Kursleiterin: **Petra Metz**

Erzielte Note: .... in Worten: ....
Erzielte Punkte: .... in Worten: ....

abgegeben bei der Oberstufenkoordination: ....

....
Unterschrift des Kursleiters / der Kursleiterin

Inhaltsverzeichnis

1 Geschichte der Spieltheorie

Schon immer hat der Mensch das Spiel geliebt - sei es, um sich die Zeit zu vertreiben, sich miteinander zu messen, oder, um in einem Glücksspiel sein Geld zu setzen und zu vermehren. Ein Spiel zu „knacken“ - endlich stets die beste Vorgehensweise zu kennen und zu gewinnen, diesen Anreiz könnten auch die ersten Spieltheoretiker gehabt haben. Mithilfe von mathematischen Verfahren sollte es möglich werden, optimale Spielweisen für Brettspiele wie Schach, Dame, Mühle oder auch Kartenspiele wie Poker, Blackjack oder Schafkopf zu bestimmen.

Bereits seit dem 16. Jahrhundert befassten sich Mathematiker wie Girolamo Cardano und Galileo mit den Wahrscheinlichkeiten in einem Würfelspiel. Fortgesetzt wurde diese Entwicklung durch weitere bekannte Forscher wie Blaise Pascal und Pierre de Fermat. Die moderne Spieltheorie hat ihren Ursprung in der 1928 veröffentlichten Arbeit „Zur Theorie der Gesellschaftsspiele“ von John von Neumann [1]. Ob all diese Mathematiker aus ihren Forschungen praktischen Nutzen ziehen konnten und reich geworden sind, lässt sich nicht mehr nachvollziehen.

Die heutigen Ergebnisse auf dem Gebiet der Spieltheorie sind allgegenwärtig. Auch wenn noch kein perfekt spielender Schach-Computer erfunden wurde, haben selbst menschliche Großmeister fast keine Chance mehr gegen ihr elektronisches Pendant. Schon 1996 gelang es dem Schach-Computer „Deep Blue“, den damaligen Weltmeister Gari Kasparow in einer Partie zu schlagen. Ebenso wie Schach-Computer haben viele andere selbstständig spielende Computerprogramme Einzug in unseren Alltag gehalten - mit erstaunlich guten Ergebnissen.

Spieltheorie ist trotz dieses ersten Eindrucks viel mehr als nur eine Lösungstechnik für Gesellschaftsspiele - sie kann auf fast jeden Lebensbereich angewendet werden. In erster Linie ist die Spieltheorie für Entscheidungssituationen jeder Art zuständig. Diese werden mathematisch abgebildet und gelöst. Häufigster Anwendungsbereich sind schon lange nicht mehr klassische Spiele, sondern wirtschaftliche Situationen. Nicht umsonst wurden in der 43-jährigen Geschichte des „Preises für Wirtschaftswissenschaften“ (umgangssprachlich: Wirtschaftsnobelpreis) schon mehrere Preise für spieltheoretische Themen

[1] vgl. Mehlmann, Alexander (1997): Wer gewinnt das Spiel? Spieltheorie in Fabeln und Paradoxa, 1. Auflage, Braunschweig/Wiesbaden, S. 4

vergeben[2]. Anreiz für diesen Teil der Forschung könnte wie schon bei den Glücksspielen der Geldgewinn sein.

In meiner Arbeit möchte ich mich hauptsächlich mit Spielsituationen in klassischen Spielen befassen, insbesondere mit der Klasse der kombinatorischen Spiele. Die Grundlagen, die im ersten Teil meiner Arbeit vermittelt werden, sind natürlich zum großen Teil auch auf andere Teilbereiche der Spieltheorie anwendbar. Im zweiten Teil meiner Arbeit befasse ich mich mit den Konzepten und Algorithmen, die unter der Oberfläche eines „Vier gewinnt"-Computerprogramms arbeiten. Das Programm schlägt im Spiel gegen den Menschen optimale Züge vor.

Insgesamt hoffe ich, Ihnen eine gute Einführung in die Spieltheorie zu bieten und Ihr Interesse für weiterführende spieltheoretische Fragestellungen zu wecken.

[2] vgl. Nobelprize.org (1994): The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 1994. `http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1994/` (Stand: 02.11.2011)

2 Einführung in die kombinatorische Spieltheorie

2.1 Definition von kombinatorischen Spielen

Wie bereits erwähnt werde ich mich in dieser Arbeit hauptsächlich mit kombinatorischen Spielen beschäftigen - doch wie definiert man kombinatorische Spiele überhaupt?

2.1.1 Eigenschaften von kombinatorischen Spielen

Defintion 2.1. Ein kombinatorisches Spiel ist ein Spiel, das folgende fünf Eigenschaften besitzt[3] :

1. Es gibt zwei Spieler.
2. Der eine Spieler gewinnt so viel, wie der andere verliert (negativ gewinnt) - man spricht von einem "**Nullsummenspiel**". Gewinn und Verlust können z.B. 1 und -1 oder 7 und -7 sein.
3. Es kann nicht unendlich lang fortgesetzt werden und jeder Spieler hat immer nur eine begrenzte Anzahl von Zugmöglichkeiten.
4. Jeder der beiden Spieler kennt alle Informationen über den jeweiligen Spielstand - es herrscht **perfekte Information**.
5. Zufall spielt keine Rolle.

Eine alternative Bezeichnung für ein kombinatorisches Spiel ist „**endliches Zwei-Personen-Nullsummenspiel mit perfekter Information**“.

Spiele, die diese Eigenschaften erfüllen, sind unter anderem Schach, Dame, Mühle[4], Tic Tac Toe und „Vier gewinnt“, auf das ich im zweiten Teil meiner Arbeit speziell eingehen

[3] nach Bewersdorff, Jörg (2010): Glück, Logik und Bluff: Mathematik im Spiel - Methoden, Ergebnisse und Grenzen, 5. Auflage, Wiesbaden, S. 97f.

[4] Auf den ersten Blick ist bei diesen drei Spielen Eigenschaft 3 nicht erfüllt, da man ein z.B. ein Schachspiel theoretisch unendlich lange fortführen könnte, solange kein Gewinner entschieden ist. Dies wird aber in den offiziellen Regeln der jeweiligen Weltverbände vorgebeugt, z.B. in den Regeln des des FIDE (Fédération Internationale des Échecs, französisch für: Internationaler Schachverband). Bei dreifach gleicher Stellung in einer Partie oder 50 aufeinanderfolgenden Zügen beider Spieler, bei denen kein Bauer bewegt oder eine Figur geschlagen wurde, folgt ein Remis (vgl. Schiedsrichterkommission des Deutschen Schachbundes e.V. (2009): Die FIDE-Schachregeln. `http://www.schachbund.de/intern/ordnung/FIDE_Regeln09.pdf` (Stand: 14.05.2009), Art. 9.2 und 9.3). In Dame und Mühle existieren ähnliche Regeln.

werde. Alle diese Spiele werden im Allgemeinen mit logischem Denken und Intelligenz verbunden, da man im Gegensatz zu z.B. Kartenspielen kein Glück braucht, um zu gewinnen. Entscheidend für den Verlauf des Spiels sind einzig die Züge der beiden Spieler.

2.1.2 Zermelos Bestimmtheitssatz

Allgemein wird angenommen, dass in einem kombinatorischen Spiel wie Schach, Dame oder „Vier gewinnt" beide Spieler von Beginn an die gleichen Chancen haben, die Partie aus eigener Kraft zu gewinnen. Diese Annahme stimmt aber nicht. Hier kommt der vom Mathematiker Ernst Zermelo aufgestellte **Bestimmtheitssatz** zur Geltung. Er besagt, dass sich jedes kombinatorische Spiel in eine dieser drei Kategorien einordnen lässt[5]:

1. **Der anziehende Spieler (Spieler 1) hat eine dominante Strategie** Wenn beide Spieler optimal spielen, gewinnt der anziehende Spieler.
2. **Der nachziehende Spieler (Spieler 2) hat eine dominante Strategie** Wenn beide Spieler optimal spielen, gewinnt der nachziehende Spieler.
3. **Keiner der beiden Spieler hat eine dominante Strategie** Wenn beide Spieler optimal spielen, wird ein Unentschieden erreicht. Damit ein Spieler gewinnt, muss der andere Spieler einen Fehler machen.

Beweis mithilfe von Rückwärtsinduktion „Zermelo selbst hat seine Aussage nicht streng bewiesen"[6]. Einen Beweis unter Verwendung der Rückwärtsinduktion liefert stattdessen z.B. Christoph Eichhorn. Anstatt die Beweisführung ausführlich zu behandeln, möchte ich eine kurze Beschreibung der Vorgehensweise geben[7]:

Der Beweis basiert darauf, dass die letzte Zugfolge in einer Partie (der letzte Zug beider Spieler) betrachtet wird. Entweder hat dabei einer der beiden Spieler die Möglichkeit, die Partie zu gewinnen (d.h., er hat eine dominante Strategie), oder keiner der beiden Spieler kann einen Gewinn erzwingen - d.h., beide Spieler können ein Unentschieden erzwingen. Nun wird ein Schritt zurück gemacht und die vorhergehende Situation (also der vorletzte Zug für beide Spieler) angesehen. Wenn für einen Spieler die Möglichkeit

[5] vgl. Bewersdorff, Jörg (2010): Glück, Logik und Bluff: Mathematik im Spiel - Methoden, Ergebnisse und Grenzen, 5. Auflage, Wiesbaden, S. 96

[6] Eichhorn, Christoph (2004): Der Beginn der Formalen Spieltheorie: Zermelo (1913). `http.://www.mathematik.uni-muenchen.de/~spielth/artikel/Zermelo.pdf` (Stand: 21.06.2004), S. 6

[7] vgl. Eichhorn, Christoph (2004): Der Beginn der Formalen Spieltheorie: Zermelo (1913). `http.://www.mathematik.uni-muenchen.de/~spielth/artikel/Zermelo.pdf` (Stand: 21.06.2004), S. 6

besteht, seine dominante Position des nächsten Zuges zu erzwingen, existiert für ihn erneut eine dominante Strategie. Das Gleiche gilt für den Gegner. Falls keiner der beiden Spieler seine dominante Position erreichen kann bzw. es keine dominante Position zu erreichen gibt, können beide die Unentschieden-Situation erzwingen.

Nun wird wieder der vorhergehende Zug betrachtet und auf die gleiche Art analysiert. Diese Vorgehensweise wird bis zur allerersten Zugfolge fortgesetzt - für einen der beiden Spieler existiert also eine durchgehende dominante Strategie, mit der er die nächst-dominante Situation erreichen kann. Oder es existiert keine dominante Strategie für beide Spieler, wodurch beide Spieler ein Unentschieden erzwingen können.

Folgen Aus dem Bestimmtheitssatz folgt, dass nicht in jedem kombinatorischen Spiel die Siegchancen gleich verteilt sein müssen - also bei optimaler Spielweise beider Spieler ein Unentschieden folgt. Stattdessen werden Spiele in die drei schon angesprochenen Kategorien eingeordnet.

Ein Beispiel für die erste Kategorie ist das Spiel „Fünf in einer Reihe“ (auch: Gomoku)[8] in welchem der erste Spieler eine dominante Strategie besitzt[9].

Ein Beispiel für ein Spiel der zweiten Kategorie ist Sim[10]. Das Spielfeld ist ein regelmäßiges Sechseck, dessen Punkte jeweils mit jedem anderen Punkt verbunden sind. Die Spieler färben abwechselnd eine Linie in ihrer zugehörigen Farbe ein. Der Spieler, welcher als erstes mit seinen eingefärbten Linien ein Dreieck gebildet hat, verliert.

Ein Spiel, das bei beidseitiger optimaler Spielweise offensichtlich in einem Unentschieden resultiert, ist Tic Tac Toe.

Zu welcher Kategorie Schach, das wohl bekannteste kombinatorische Spiel der Welt gehört, ist aufgrund der vielen möglichen Spielverläufe noch nicht erwiesen.

Durch den geltenden Bestimmtheitssatz ist es für jeden Spieler möglich, durch optimale Spielweise ein bestimmtes Ergebnis zu erreichen bzw. sich ein bestimmtes Ergebnis zu sichern - unabhängig davon, wie der Gegenspieler handelt. Auf diese Tatsache werde ich im Kapitel „Minimax- und Maximin-Wert“ näher eingehen.

[8] wie Tic Tac Toe; das Spielfeld ist aber 15x15-Felder groß und das Ziel ist es, statt drei fünf Steine/Zeichen in eine Reihe zu setzen

[9] siehe Alus, L. V./Herik, 1, H. J. van den/Huntjens, M. P. H. (1996): GO-MOKU SOLVED BY NEW SEARCH TECHNIQUES, in: Computational Intelligence, Band 12, Ausgabe 1, S. 7-23

[10] siehe Slany, Wolfgang (1999): Graph Ramsey games. DBAI TECHNICAL REPORT DBAI-TR-99-34. `http://www.dbai.tuwien.ac.at/ftp/papers/slany/dbai-tr-99-34.ps.gz` (Stand: 30.10.11), S. 32f

2.2 Allgemeine Darstellungsweisen von Spielen

Um Spiele zu analysieren, ist es nötig, sie in eine geeignete Darstellungsform zu bringen. Bei den verschiedenen Darstellungsformen unterscheidet man zwischen Formen für Spiele mit nur einem gleichzeitigen Zug (ein klassisches Beispiel ist „Schere, Stein, Papier“) und für Spiele mit mehreren, aufeinanderfolgenden Zügen (Spiele wie Schach, Mensch ärgere dich nicht, ...). Die zu analysierenden Spiele müssen keine kombinatorischen Spiele sein. Spiele mit gleichzeitigem Zug sind dies sogar nie, da man als Spieler nicht weiß, welchen Zug der Gegner ausführen wird und somit keine vollständige Information erhält. Diese Spiele lassen sich in eine Normalform (auch: strategische Form) überführen, die als Matrix abgebildet werden kann. Für mehrzügige Spiele kann die einfache Normalform auf die extensive Normalform erweitert werden. Die anschaulichste Darstellungsform für mehrzügige Spiele ist aber, wie auf den folgenden Seiten deutlich wird, das Baumdiagramm bzw. die Extensiv-Form.

2.2.1 Spiele mit einem (gleichzeitigen) Zug

Normalform bzw. strategische Form Die Normalform ist ein Modell, in das sich ein Spiel mathematisch umformen lässt. Dabei enthält sie folgende Angaben[11]:

Menge von Spielern Jeder Spieler wird durch seinen Index $i = 1, 2, 3, \dots, \bar{I}$ benannt. Die Anzahl aller Spieler ist $\bar{I}$.

Menge der für einen Spieler verfügbaren Strategien Jeder Spieler i hat verschiedene Zugmöglichkeiten (bzw. Strategiemöglichkeiten[12]), die insgesamt in der Menge S_i zusammengefasst werden. Die von Spieler i gewählte Strategie heißt s_i.

Strategienvektor Die von allen Spielern gewählten Strategien werden in einem Tupel s mit Länge $\bar{I}$ aneinandergereiht. $s = (s_1, \dots s_{\bar{I}})$ Das Tupel ist ein **Strategienvektor**. Jeder Strategienvektor führt zu **genau einem** Spielausgang (da alle Spieler ihre Züge festgelegt haben)

Strategienraum Der Strategienraum S enthält alle möglichen Partien und berechnet sich durch das Vektorprodukt $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{\bar{I}}$. Ein Strategienvektor s ist ein Element aus dem Strategienraum S.

Nutzwertfunktion Jeder Spielausgang ergibt für jeden Spieler einen bestimmten Nutz-

[11]vgl. Rieck, Christian (2010): Spieltheorie. Eine Einführung, 10. Auflage, Eschborn, S. 202ff.
[12]eine genauere Definition für eine Strategie finden Sie auf S. 11

wert $u_i(s)$, das heißt, für jeden Spieler i liegt eine solche Nutzwertfunktion vor.

Auszahlungsvektor Der Auszahlungsvektor $u(s) = (u_1(s), \ldots, u_{\bar{I}}(s))$ fasst die Auszahlungen an alle Spieler für den möglichen Spielausgang s in einem Tupel zusammen. Die Auszahlung an z.B. Spieler 3 ist dann das dritte Element des Tupels.

Darstellung der Normalform in einer Matrix Die Normalform lässt sich gut in einer Auszahlungsmatrix (bzw. einer Tabelle) darstellen. Für zwei Spieler wird eine zweidimensionale Matrix gewählt. Alle Strategien (bzw. Züge), die Spieler 1 laut der Menge S_1 zu Verfügung stehen, werden als Zeilen der Matrix angeordnet. Alle für Spieler 2 möglichen Strategien (Elemente aus S_2) werden als Spalten angeordnet. Insgesamt ergeben sich also $|S_1| \cdot |S_2|$ Elemente der Matrix - jedes Element der Matrix entspricht einem Spielausgang (einem Strategienvektor s). In jedem Feld der Matrix steht der jeweilige Auszahlungsvektor für diesen möglichen Spielausgang. Handelt es sich bei dem darzustellenden Spiel um ein Nullsummenspiel, reicht es aus, nur die Auszahlung für Spieler 1 in das Matrixfeld zu schreiben, da die Auszahlung für Spieler 2 genau entgegengesetzt ist. Auch im weiteren Verlauf dieser Arbeit werde ich Nullsummenspiele stets aus der Sicht von Spieler 1 betrachten.

			Spieler 2	
		Schere	Stein	Papier
Spieler 1	Schere	0	-1	1
	Stein	1	0	-1
	Papier	-1	1	0

Abbildung 1 Auszahlungsmatrix der Normalform des bekannten Spiels Schere, Stein, Papier.

Diese Auszahlungsmatrix des Spiels „Schere, Stein, Papier“ zeigt alle möglichen Spielausgänge an - wählt beispielsweise Spieler 1 die Strategie/den Zug „Stein“ und Spieler 2 die Strategie „Papier“, so ergibt sich für ihn die Auszahlung -1, für Spieler 2 dementsprechend +1.

Sind mehr als zwei Spieler an einem Spiel beteiligt, lässt sich das ebenfalls in einer Matrix darstellen - diese müsste dann allerdings 3- bzw. n-dimensional sein, um alle möglichen Züge der Spieler zu beinhalten.

2.2.2 Extensive Spiele: Spiele mit mehreren aufeinanderfolgenden Zügen

Spielbaum als Spezialfall der Extensiv-Form Die Extensiv-Form wird verwendet, um alle Entscheidungsmöglichkeiten der Spieler vollständig darzustellen[13]. Chronologische Abläufe werden ebenfalls abgebildet. Der Spielbaum bzw. ein Baumdiagramm ist ein graphischer Spezialfall der Extensiv-Form, der nicht auf jedes Spiel angewendet werden kann. In manchen Spielen gibt es z.B. kein festgelegtes Ende und deshalb theoretisch unendlich verschiedene Spielverläufe - in einem Spielbaum können diese Spiele deshalb nicht angezeigt werden[14]. Hier würden mathematische Vorgehensweisen und andere graphische Darstellungsmöglichkeiten der Extensiv-Form greifen. Für kombinatorische Spiele ist ein Spielbaum jedoch immer geeignet, da bei diesen Spielen die Anzahl der Züge begrenzt ist.

Ein Spielbaum besteht aus mehreren Knoten, die durch Zugmöglichkeiten der Spieler miteinander verbunden sind[15]. Jeder Knoten entspricht einer Spielsituation. Es gibt **einen Startknoten** - dieser repräsentiert die Situation, bei der die Betrachtung des Spiels startet[16]. Der Startknoten ist der oberste Knoten und der Einzige, der aus keinem anderen Knoten hervorgeht. Er ist ein **Entscheidungsknoten**, d.h., hier muss sich ein Spieler (der bei dieser Situation an der Reihe ist) zwischen mehreren Zügen entscheiden. Dieser Zug führt zu einer weiteren Situation und damit einem weiteren Entscheidungsknoten, an dem sich der nächste Spieler für seinen Zug entscheiden muss. Hat der Spieler, der an der Reihe ist, keine Zugmöglichkeiten mehr (wenn er beispielsweise gewonnen oder verloren hat), ist ein **Endknoten** erreicht. Jeder dieser Knoten entspricht genau einem möglichen Spielausgang. An einem Endknoten steht üblicherweise der Auszahlungsvektor des Spielausgangs.

Jede mögliche Abfolge von Zügen, die von Startknoten zu einem Endknoten führt, ist eine **Partie**.

In Abbildung 2 wird eine aktuelle Wirtschaftssituation als Spiel in einem Spielbaum dar-

[13] vgl. Rieck, Christian (2010): Spieltheorie. Eine Einführung, 10. Auflage, Eschborn, S. 120ff.
[14] vgl. Rieck, Christian (2010): Spieltheorie. Eine Einführung, 10. Auflage, Eschborn, S. 121ff.
[15] nachfolgende Erläuterungen in Anlehnung an Rieck, Christian (2010): Spieltheorie. Eine Einführung, 10. Auflage, Eschborn, S. 123
[16] Bei wenig komplexen Spielen wird die wirkliche Startsituation des Spiels, also die Situation bei Spielbeginn,als Startknoten verwendet. Bei komplexen Spielen werden aber meist Situationen als Startknoten betrachtet, in welchen die ersten Züge schon gemacht wurden

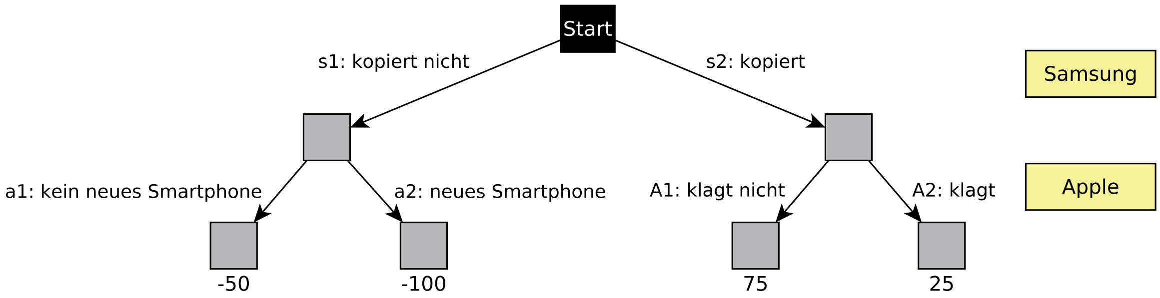

Abbildung 2 Der Spielbaum des kombinatorischen (ökonomischen) Spiels zwischen Samsung und Apple.)

gestellt[17]. Durch Vereinfachung und Vernachlässigung von zufälligen Faktoren entsteht ein kombinatorisches Spiel, bei dem alle möglichen Spielausgänge bekannt sind. Spieler sind die Unternehmen „Samsung" und „Apple". Nach der Veröffentlichung des iPhone 4 von Apple hat Samsung die Wahl, das Gerät zu kopieren (bzw. ein ähnliches und billigeres Gerät herauszubringen). Tut Samsung dies nicht, erzielt Apple einen großen Gewinn (und Samsung großen Verlust) und kann den Gewinn durch Veröffentlichung eines Nachfolgemodells noch vergrößern. Bringt Samsung ein ähnliches Gerät heraus, hat Apple die Möglichkeit, Samsung aufgrund von Patentrechten zu verklagen und so seinen Verlust bzw. den Gewinn des anderen zu verringern.

Extensive Normalform Jeder Spielbaum, der Spiele mit mehreren aufeinanderfolgenden Zügen darstellt, lässt sich in eine Normalform überführen, die dann extensive Normalform genannt wird[18]. Allerdings wird in der Normalform immer gleichzeitig gezogen - in dem Spielbeispiel aus Abbildung 2 wüsste Apple bei seiner Entscheidung also nicht, für welchen Zug sich Samsung entschieden hat. Um dieses Problem zu umgehen, muss man in der Normalform die Strategien und nicht nur die bloßen Züge betrachten. Der Begriff „Strategie" ist bei der einfachen Normalform bereits aufgetreten und soll nun genauer definiert werden[19]:

> **Defintion 2.2.** Eine Strategie, für die sich ein Spieler entscheiden muss, ist ein **genauer Plan** der eigenen Vorgehensweise für die **gesamte Partie**. Indem sich

[17] An dieser Spielsituation zeigt sich nebenbei, dass auch wirtschaftliche Situationen als Spiele betrachtet werden können. Nicht umsonst haben schon einige renommierte Spieltheoretiker den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften erhalten.

[18] vgl. Rieck, Christian (2010): Spieltheorie. Eine Einführung, 10. Auflage, Eschborn, S. 160ff.

[19] vgl. Rieck, Christian (2010): Spieltheorie. Eine Einführung, 10. Auflage, Eschborn, S. 154ff.

ein Spieler für eine Strategie entscheidet, legt er sich in jeder möglichen Situation auf einen genauen Antwort-Zug fest. Haben sich alle Spieler für eine Strategie entschieden, gibt es keine weiteren Entscheidungen zu fällen, das Spiel läuft praktisch automatisch ab (alle Spieler haben sich ja bereits auf alle ihre Züge festgelegt).

Die extensive Normalform stellt nun alle Strategien der Spieler einander in einer Tabelle gegenüber und gibt die Auszahlungsvektoren an. Die Strategien werden gleichzeitig gewählt, das Spiel kann aber trotzdem als mehrzügig angesehen werden. Die Spielsituation aus Abbildung 2 sieht als extensive Normalform folgendermaßen aus:

		Apple			
		(a_1,A_1)	(a_1,A_2)	(a_2,A_1)	(a_2,A_2)
Samsung	(s_1)	-50	-50	-100	-100
	(s_2)	75	25	75	25

Abbildung 3 Auszahlungsmatrix des ökonomischen Spiels zwischen Samsung und Apple

Da Samsung als erster Spieler zieht und nur für diese Anfangssituation einen Zug wählen muss, hat es weiterhin nur zwei verschiedene Strategien zur Auswahl. Da Apple nach einem Zug von Samsung immer jeweils zwei verschiedene Zugmöglichkeiten hat und in einer Strategie auf jeden möglichen Zug von Samsung ein „Gegen-Zug“ gewählt werden muss, ergeben sich durch Kombination dieser Züge vier verschiedene Strategiemöglichkeiten. Die Strategie (a_1,A_1) bedeutet beispielsweise, dass Apple den Zug a_1 macht, wenn Samsung s_1 ausführt, und A_1, wenn Samsung s_2 wählt.

2.3 Besondere Begriffe der Spieltheorie

2.3.1 Nash-Gleichgewicht

Das Nash-Gleichgewicht ist ein wichtiges Konzept der Spieltheorie und behandelt die Frage, welcher Zug (bzw. welche Strategie) für einen Spieler am lohnenswertesten ist. Es lässt sich am einfachsten in Situationen zeigen, die nur einen gleichzeitigen Zug haben. Ein klassisches Beispiel für ein Nash-Gleichgewicht ist das „Gefangenendilemma“[20]:

> **Defintion 2.3.** Die Bankräuber Anton und Boris werden von der Polizei gefasst. Sie werden in getrennte Zellen eingesperrt und können somit nicht miteinander kommunizieren. Die Polizei bietet den beiden folgenden „Deal“ an: Gestehen beide ihre Tat, werden sie vier Jahre eingesperrt. Gesteht aber der eine, während der andere abstreitet, erhält der Geständige Strafmilderung und muss nur noch ein Jahr im Gefängnis verbringen, der andere sieben Jahre. Gesteht keiner der beiden die Tat, werden sie nur wegen illegalen Waffenbesitzes belangt und müssen zwei Jahre ins Gefängnis.
>
> Die Normalform des Gefangenendilemmas sieht deshalb wie folgt aus:

		Boris	
		Gestehen	Nicht gestehen
Anton	Gestehen	(4,4)	(1,7)
	Nicht gestehen	(7,1)	(2,2)

Abbildung 4 Das Gefangenendilemma in der Normalform (die Zahlen in der Auszahlungsmatrix stehen für die bevorstehenden Jahre im Gefängnis - je niedriger, desto besser für den Räuber)

Auf den ersten Blick stellt es sich so dar, als ob der Zug „Nicht gestehen“ für beide Spieler der Optimale sei. Beide müssen durch diese Kombination nur zwei Jahre im Gefängnis verbringen und nicht vier oder sogar sieben Jahre. Allerdings wäre es ausgehend von dieser Kombination für z.B. Spieler Boris besser, zu gestehen, damit er sein Ergebnis (seine Auszahlung) verbessert und nur noch ein Jahr ins Gefängnis muss. Genauso verhält es sich für Spieler Anton. Da die beiden Spieler nicht miteinander kommunizieren können, können sie nicht vereinbaren, nicht zu gestehen. Die „Gefahr“, dass der jeweils Andere gesteht, da dies für ihn eine bessere Auszahlung als „Nicht gestehen“ bedeutet, besteht

[20] frei nach Rieck, Christian (2010): Spieltheorie. Eine Einführung, 10. Auflage, Eschborn, S. 46ff.

somit immer. Wenn beide Verbrecher sich entschließen zu gestehen, gibt es für den jeweils anderen Verbrecher keine Möglichkeit, sein Ergebnis zu verbessern - ein Gleichgewicht ist entstanden. Gesteht ein Verbrecher doch nicht, verschlechtert er seine Haftstrafe auf sieben Jahre. Dieser Zustand, bei dem es für keinen der beiden Spieler einen anderen, für ihn ertragreicheren Zug gibt, den er wählen könnte, ist das Nash-Gleichgewicht[21]. Somit ist für beide Spieler der beste Zug „Gestehen“, was für beide eine doppelt so lange Haftstrafe bedeutet, als wenn beide nicht gestanden hätten.

> **Defintion 2.4.** Im **Nash-Gleichgewicht** hat keiner der beiden Spieler einen Anreiz, als Einziger von der Gleichgewichtskombination abzuweichen; die Spieler spielen wechselweise beste Erwiderungen. Das Nash-Gleichgewicht wird oft auch **strategisches Gleichgewicht** genannt[22].

Laut dem „Gleichgewichtstheorem von Nash für nichtkooperative n-Personen-Spiele“ existiert für jedes nichtkooperative Spiel mit n Spielern mindestens ein Nash-Gleichgewicht[23], das jedoch nicht immer so einfach wie in diesem Beispiel zu finden ist. Stattdessen wird es dann durch unterschiedliche Zufallsverteilungen der Züge erreicht, sogenannte „gemischte Strategien“[24]. Ein Spiel, bei dem durch eine solche zufällige Zufallsauswahl ein Nash-Gleichgewicht erreicht wird, ist z.B. „Schere-Stein-Papier“. Eine ausführliche Beschreibung der gemischten Strategien ist dem Umfang der Arbeit aber nicht angemessen.

2.3.2 Minimax-Strategie

Mithilfe der Minimax-Strategie lässt sich ein Nash-Gleichgewicht speziell für Zwei-Personen-Nullsummenspiele finden[25].

Grundsätzlich geht es bei dieser Strategie darum, dass jeder der beiden Spieler davon ausgeht, dass der Gegner stets mit dem Zug kontert, der für ihn den größten Verlust bzw. für den Gegner den größten Gewinn sichert. Deshalb versucht ein Spieler, der

[21] Das Nash-Gleichgewicht wurde 1950 in der Doktorarbeit von John Forbes Nash bewiesen. Nash erhielt für seine spieltheoretische Arbeit 1994 gemeinsam mit Reinhard Selten und John Harsanyi den Preis für Wirtschaftswissenschaften (Wirtschaftsnobelpreis).
[22] Rieck, Christian (2010): Spieltheorie. Eine Einführung, 10. Auflage, Eschborn, S. 32
[23] vgl. Basieux, Pierre (2008): Die Welt als Spiel. Spieltheorie in Gesellschaft, Wirtschaft und Natur, 1. Auflage, Reinbek, S. 73
[24] vgl. Rieck, Christian (2010): Spieltheorie. Eine Einführung, 10. Auflage, Eschborn, S. 204f.
[25] nachfolgende Erläuterungen in Anlehnung an Bewersdorff, Jörg (2010): Glück, Logik und Bluff: Mathematik im Spiel - Methoden, Ergebnisse und Grenzen, 5. Auflage, Wiesbaden, S. 99ff.

nach der Minimax-Strategie spielt, sich ebenfalls den größten Gewinn zu sichern, den er unabhängig von der Spielweise des anderen erreichen kann. Gleichzeitig verringert er damit den Gewinn des anderen so weit, wie es bei perfekter Spielweise des Gegners geht. Selbst wenn der Gegner nicht perfekt spielt, ist der Spieler im Vorteil, da er ja mit dem schlimmstmöglichen Zug des Gegners gerechnet hat und jeder andere Zug des Gegners für sein Ergebnis noch besser ist. Folgende Werte sind in der Minimax-Strategie wichtig:

Maximin-Wert Diese Auszahlung kann sich der aktuelle Spieler mindestens sichern, selbst wenn sein Gegenspieler den optimalen Gegen-Zug spielt. Er **maximiert** seinen **minimalen** Gewinn.

Minimax-Wert Der Gegenspieler kann die Auszahlung an den aktuellen Spieler auf diesen Wert reduzieren, selbst wenn der aktuelle Spieler optimal spielt. Der Gegenspieler **minimiert** den **maximalen** Gewinn des ersten Spielers.

		Spieler 2	
		Zug 1	Zug 2
Spieler 1	Zug 1	-5	3
	Zug 2	2	-1

Abbildung 5 Ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel.

Der Maximin-Wert des Spiels aus Abbildung 5 ist -1, diesen kann sich Spieler 1 durch Zug 2 sichern. Würde er Zug 1 spielen, bestünde die Gefahr, dass Spieler 2 Zug 1 macht und ihm dadurch einen Verlust von -5 verursacht. Der Minimax-Wert, also der maximale Gewinn, auf den Spieler 2 die Auszahlung von Spieler 1 reduzieren kann, ist +2 durch seinen Zug 1. Würde er Zug 2 spielen, hätte Spieler 1 noch die Chance auf einen Gewinn von 3. Die vom Maximin- und Minimax-Wert vorgeschlagenen Züge für beide Spieler würden also in der Auszahlung +2 resultieren. Dieser Spielausgang ist kein Nash-Gleichgewicht, da es für jeden Spieler ausgehend von dieser Position sinnvoll wäre, den Zug zu wechseln (in einem Nash-Gleichgewicht ist das nicht der Fall, hier besteht für beide Spieler kein Anreiz, den Zug zu wechseln). Trotzdem muss für dieses Spiel laut dem Gleichgewichtstheorem von Nash ein Gleichgewicht existieren - es würde hier durch die bereits erwähnten gemischte Strategien erreicht werden. Man kann sagen, dass gemischte Strategien nötig sind, sobald Maximin- und Minimax-Wert nicht den gleichen Wert haben.

In einem kombinatorischen Spiel aber sind beide Werte immer gleich - es existiert stets (mindestens) ein Gleichgewicht, ohne dass gemischte Strategien nötig sind. Die Existenz eines solchen Gleichgewichts wird in Zermelos Bestimmtheitssatz, auf den ich bereits am Anfang meiner Arbeit eingegangen bin, begründet. Wenn beide Spieler optimal spielen, hängt es nur vom jeweiligen Spiel(typ) ab, welches Ergebnis erreicht wird. Dieses Ergebnis ist z.B. bei „Tic Tac Toe“ 0, bei „Othello“ -1. Das bedeutet auf den Maximin-Wert bezogen, dass er bei „Othello“ ebenfalls -1 ist - selbst wenn Spieler 1 optimal spielt, gewinnt der ebenfalls perfekt spielende Spieler 2. Der Minimax-Wert ist die minimale Auszahlung, die Spieler 2 aus eigener Kraft bei Spieler 1 verursachen kann - dieser Wert ist durch den Bestimmtheitssatz also ebenfalls -1.

> **Defintion 2.5.** Der Minimax- und der Maximin-Wert haben in jedem kombinatorischen Spiel jeweils den gleichen Wert. Dieser Wert wird bei optimaler Spielweise beider Spieler erreicht und **Wert des Spiels** genannt.

Wie man ein kombinatorisches Spiel mithilfe von Minimax- und Maximin-Wert optimal spielt, wird im „Minimax-Algorithmus“ in Kapitel 3 beschrieben.

3 Finden des besten Zugs am Beispiel „Vier gewinnt“

3.1 Einführung in „Vier gewinnt“

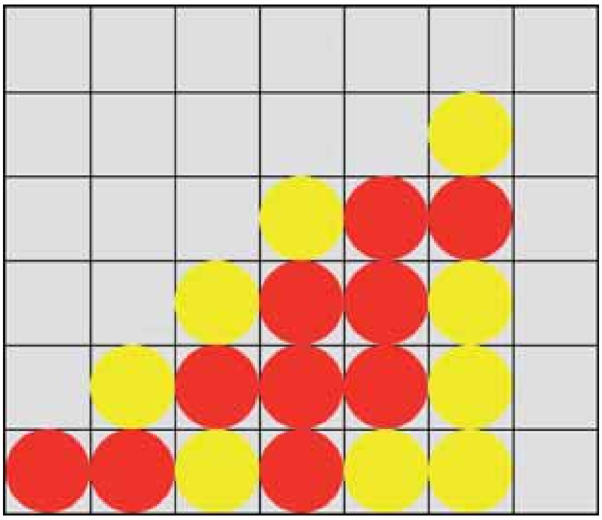

Abbildung 6 Vier gewinnt

„Vier gewinnt“ ist ein bekanntes Gesellschaftsspiel, dessen Regeln zwar einfach zu verstehen sind, der Spielverlauf aber trotzdem sehr vielfältig und komplex werden kann. Die Partie zu „durchschauen“ und immer mindestens ein Unentschieden zu erzwingen, wie es in vergleichbaren Spielen wie „Tic Tac Toe“ der Fall ist, ist in „Vier gewinnt“ für den Menschen schwer bis gar nicht möglich. Für Computerprogramme, die die besten Züge berechnen sollen, sind die Bedingungen ideal. Einerseits gibt es immer nur maximal sieben Möglichkeiten für einen Zug, andererseits sind trotzdem mehrere Millionen verschiedene Partien möglich, die der Computer einberechnen muss. Eine besondere Herausforderung sind die verschiedenen Optimierungsmöglichkeiten, die genutzt werden können. Denn sonst würde der Computer nur bei Endspielsituationen in angemessener Zeit einen optimalen Zug errechnen, bei Anfangssituationen kann die Berechnung dagegen schon mehrere Stunden und Tage andauern.

Hier ein kurzer Überblick über die Regeln von „Vier gewinnt“:

1. Gespielt wird üblicherweise auf einer 6x7-Felder großen Spielfläche, die senkrecht aufgestellt ist. Die münzartigen Spielchips fallen in die gewählten Felder hinein.
2. „Vier gewinnt“ ist ein Zwei-Spieler-Spiel, das die beiden Spieler gegeneinander

spielen. Beide Spieler setzen abwechselnd jeweils einen Spielstein. Sieger ist der Spieler, der es als Erstes schafft, vier seiner Spielsteine aufeinanderfolgend in einer Reihe zu platzieren. Dabei werden waagrechte, senkrechte und diagonale Reihen betrachtet.

3. Spielsteine können, anders als in „Tic Tac Toe“, nicht auf ein beliebiges Spielfeld gesetzt werden, sondern müssen in der gewählten Spalte auf dem darunterliegenden Spielstein platziert werden (bzw. auf dem untersten Feld einer Spalte). Sie „fallen“ also immer so tief wie nur möglich. Für den Anfangszug ergeben sich deshalb nur 7 verschiedene Möglichkeiten und nicht 42 (die Anzahl der Spielfelder).

4. Hat es nach Besetzung aller 42 Spielfelder keiner der Spieler geschafft zu gewinnen, endet die Partie in einem Unentschieden.

Ich habe im Rahmen dieser Seminararbeit ein „Vier gewinnt“ Computerprogramm „4the-Win“ entwickelt, das für den aktiven Spieler aus jeder beliebigen Position heraus automatisch den bestmöglichen Zug (bzw. die bestmöglichen Züge) berechnet. In diesem Kapitel möchte ich die Methoden, die hinter diesem Programm stehen, erläutern.

3.2 Brute-Force-Methode

Die Brute-Force-Methode (Brute Force auf Deutsch: „rohe Gewalt“) ist eine „rabiate“ Methode, um den besten Zug im „Vier gewinnt“ zu ermitteln. Sie ist aber der Grundbaustein für fast jeden Computer-Lösungsalgorithmus. Das Programm rechnet jeden möglichen Zug bzw. jeden möglichen Spielverlauf ab der gegebenen Position aus. Sie achtet dabei nicht darauf, ob ein Zug (für einen Menschen) offensichtlich sinnvoller wäre als ein anderer, stattdessen werden stumpf alle Zugfolgen und möglichen Endsituationen berechnet[26]. Die möglichen Endsituationen werden von anderen Algorithmen verarbeitet, die so Rückschlüsse ziehen können, welcher Zug sinnvoller als die anderen ist. Algorithmen sind z.B. der von mir entwickelte „SummenAlgo“ und der Minimax-Algorithmus, welche ich im weiteren Verlauf des Kapitels behandeln werde.

Die von der Brute-Force-Methode berechneten Daten können am besten in einem Spielbaum dargestellt werden. In Abbildung 7 wird der Spielbaum gezeigt, der sich ab der gegebenen Tic Tac Toe-Position ergibt.

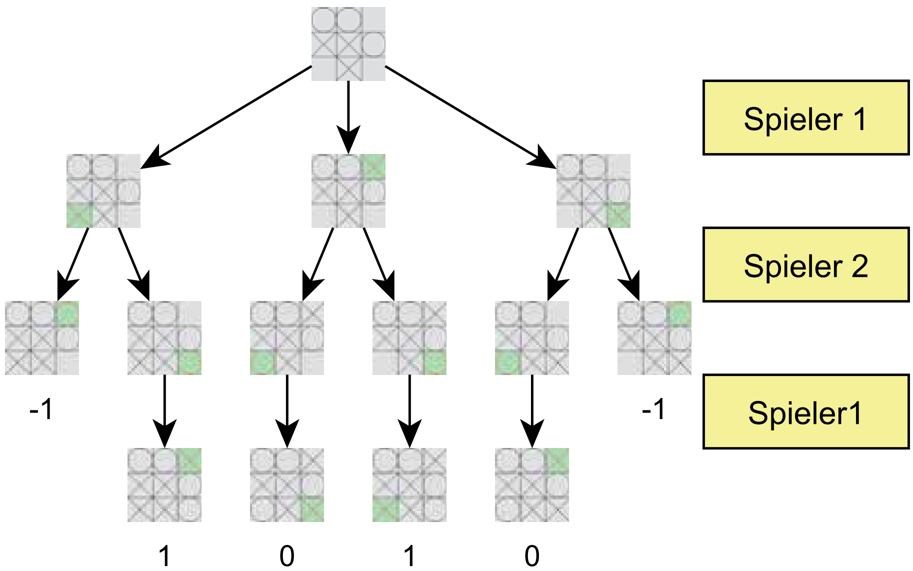

Abbildung 7

[26]Die Brute-Force-Methode wird ebenfalls beim Knacken von Login-Kennwörtern verwendet. Es werden alle möglichen Passwortkombinationen ausprobiert, was Millionen von Versuchen bedeutet und je nach Passwortstärke Sekunden bis hin zu Jahren dauern kann.

3.3 Bewertungsalgorithmen

Bewertungsalgorithmen haben die Aufgabe, mithilfe des errechneten Spielbaums die möglichen Züge zu bewerten und miteinander zu vergleichen und so eine Empfehlung für den Spieler auszugeben, welchen Zug er als nächstes wählen sollte. Die von mir behandelten Bewertungsalgorithmen arbeiten mit Spielbäumen, die sämtliche mögliche Züge und Spielsituationen enthalten (errechnet durch die Brute-Force-Methode), fortgeschrittene Bewertungsalgorithmen können sogar mit nur einem Ausschnitt des vollständigen Spielbaums rechnen und Züge abwägen. Dies ist vor allem bei komplexen Spielen wie Schach sinnvoll, bei denen es zu lange dauern würde, den kompletten Spielbaum zu berechnen.

3.3.1 Eigener Algorithmus „SummenAlgo“

Der von mir selbst entwickelte Algorithmus „SummenAlgo“ basiert auf der Idee, dass sich aus der Summe der Kindknoten-Positionswerte der Wert für den übergeordneten Knotenpunkt-Positionswert ergibt. Je höher der resultierende Positionswert durch einen Zug ist, desto besser ist der Zug. Nach Berechnung sämtlicher Positionswerte der durch die möglichen Züge ausgelösten Positionen wird der Zug mit dem höchsten Positionswert als Zugempfehlung ausgegeben.

Dieses Baumdiagramm eines beliebigen Spiels veranschaulicht die Berechnung des besten Zuges durch den „SummenAlgo“-Algorithmus:

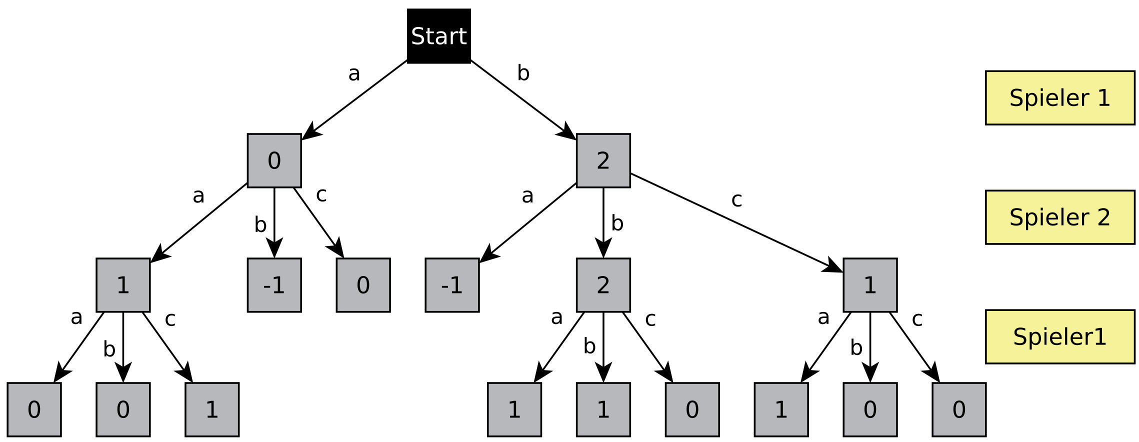

Abbildung 8 Für Spieler 1 ist laut dem „SummenAlgo“ Zug b sinnvoller, da der Positionswert mit 2 höher ist als bei Zug a.

Anders als der Minimax-Algorithmus kann SummenAlgo nicht in jeder beliebigen Situation den besten Zug ermitteln, in einem Großteil der von mir getesteten Positionen sind die Vorschläge von Minimax und SummenAlgo aber die selben.

3.3.2 Minimax-Algorithus

Der Minimax-Algorithmus handelt nach der Minimax-Strategie[27]. Das heißt, dass er bei Ermittlung des optimalen Zuges für z.B. Spieler 1 damit rechnet, dass Spieler 2 immer den Zug wählen wird, der ihm das bestmögliche Ergebnis unabhängig von der Spielweise von Spieler 1 sichert. Er muss also Züge finden, die das bestmögliche Ergebnis für Spieler 1 unabhängig von der Spielweise von Spieler 2 sichern. Spieler 2 soll also immer nur noch die Wahl zwischen Zügen gelassen werden, die kein so schlechtes Ergebnis liefern wie die Züge, die bei einem anderen Zug von Spieler 1 zur Wahl gestanden wären.

Dieses Baumdiagramm zeigt die Berechnungen des Minimax-Algorithmus am fiktiven kombinatorischen Spiel aus Abbildung 8:

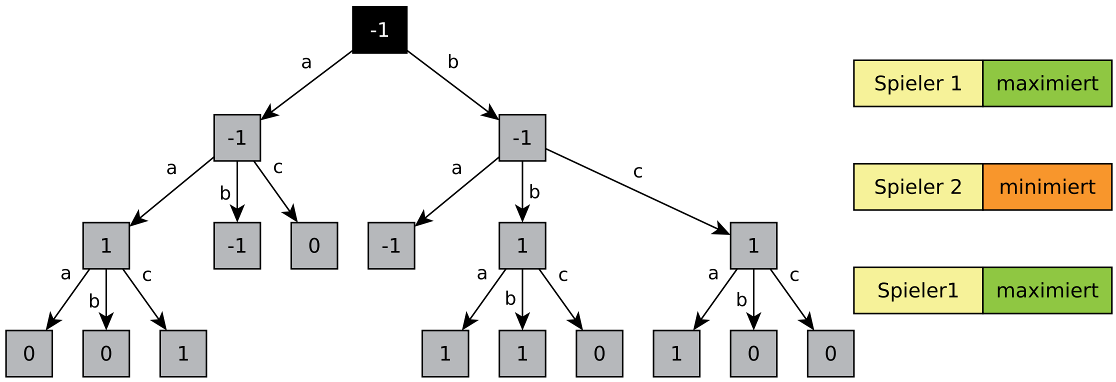

Abbildung 9 Baumdiagramm aus Sicht von Spieler 1. Für ihn sind laut „Minimax-Algorithmus“ beide Züge gleich schlecht, da ein optimaler Spieler 2 auf jeden Fall gewinnt.

Wie beim „SummenAlgo“ wird der Spielbaum von unten betrachtet. Es werden mithilfe der Kindknoten Positionswerte für die übergeordneten Knoten errechnet. Dem Elternknoten wird dabei der Wert der besten Kindknoten-Position zugewiesen (aus Sicht des Spielers, der bei der Elternknoten-Position an der Reihe ist). So ist z.B. nach der Zugfolge a-a Spieler 1 an der Reihe, er hat die Wahl zwischen Zug a, b und c. Er wird

[27] nachfolgende Erläuterungen in Anlehnung an Rieck, Christian (2010): Spieltheorie. Eine Einführung, 10. Auflage, Eschborn, S. 312ff.

natürlich Zug c wählen, da er die maximale Auszahlung für ihn bedeutet. Der optimale Spieler 1 wird immer den Zug nehmen, der seinen Gewinn **maximiert**. Spieler 2 hat dagegen das Ziel, den Gewinn für Spieler 1 zu **minimieren**. Nach Zug a durch Spieler 1 hat er ebenfalls die Wahl zwischen Zug a, b oder c. Zug a bedeutet für Spieler 2 aber praktisch den sicheren Verlust, da ein optimaler Spieler 1 dadurch gewinnt. Für ihn ist deshalb Zug b am besten, da er den **minimalen** Gewinn für Spieler 1 bedeutet (und den maximalen Gewinn für sich selbst - er gewinnt). Der Minimax-Algorithmus ordnet also dem Elternknoten je nach aktuellem Spieler den maximalen bzw. minimalen Positionswert der Kindknoten zu. Der Wert dieses Spiels ist nach vollständiger Berechnung der Positionswerte also -1. Spieler 1 kann das Spiel gegen einen optimalen Gegner nicht gewinnen.

3.4 Optimierung mit Alpha-Beta-Algorithmus

Der Alpha-Beta-Algorithmus ist eine Optimierung der Brute-Force-Methode. Anders als im bloßen Brute-Force-Verfahren werden nicht mehr sämtliche Züge und Zugfolgen ausgerechnet, sondern es wird an bestimmten Stellen abgebrochen. Dazu werden zwei Werte eingeführt - α- und β-Wert[28]. Beide Werte entsprechen Positionswerten - α ist der Positionswert, den Spieler 1 nach aktuellem Stand der Berechnung mit einem seiner Züge mindestens erreichen kann. Zeichnet sich ab, dass durch einen anderen Zug, an dem gerade gerechnet wird, auf jeden Fall nur ein Positionswert kleiner als der α-Wert erreicht wird, wird die Berechnung abgebrochen (ein sogenannter α-Cutoff) und mit dem nächsten möglichen Zug fortgesetzt. Wird ein Zug gefunden, der einen besseren Positionswert als der aktuelle α-Wert hat, wird der α-Wert auf diesen Positionswert aktualisiert. Der α-Wert ist also eine Mindestanforderung von Spieler 1 an den zu erreichenden Positionswert.

In Abbildung 10 ergeben sich zwei α-Cutoffs, da Zug b für Spieler 1 bereits nach Berechnung des ersten Endknotens auf jeden Fall einen schlechteren Positionswert bedeutet als Zug a (α-Wert = -1). Die Berechnung an diesem Zug kann deshalb abgebrochen werden.

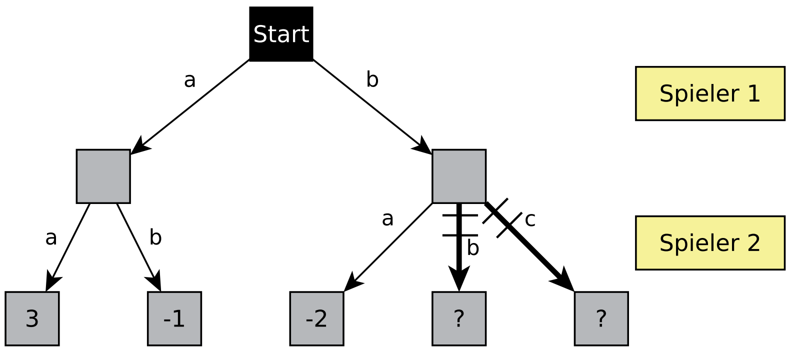

Abbildung 10 Hier können zwei α-Cutoffs gemacht werden.

Ähnliche Bedeutung hat der β-Wert für Spieler 2. In diesem Wert wird der Positionswert gespeichert, auf den Spieler 2 den Gewinn von Spieler 1 nach aktuellem Berechnungsstand mindestens minimieren kann. Wird ein noch besserer Zug gefunden, der den Gewinn für Spieler 1 noch stärker reduziert, wird der β-Wert aktualisiert. Bringt der aktuell zu berechnende Zug auf jeden Fall keinen besseren Positionswert zustande, wird die Berechnung an diesem Zug abgebrochen (β-Cutoff).

[28]nachfolgende Erläuterungen in Anlehnung an Bewersdorff, Jörg (2010): Glück, Logik und Bluff: Mathematik im Spiel - Methoden, Ergebnisse und Grenzen, 5. Auflage, Wiesbaden, S. 183f.

Der β-Wert in Abbildung 11 beträgt nach Betrachtung der Zugfolge a-a +3, der Positionswert für Zugfolge a-b wird aber mindestens +7 ergeben. Deshalb kann man sofort sagen, dass Zug b für Spieler 2 schlechter ist und die weitere Berechnung an diesem Zug abbrechen.

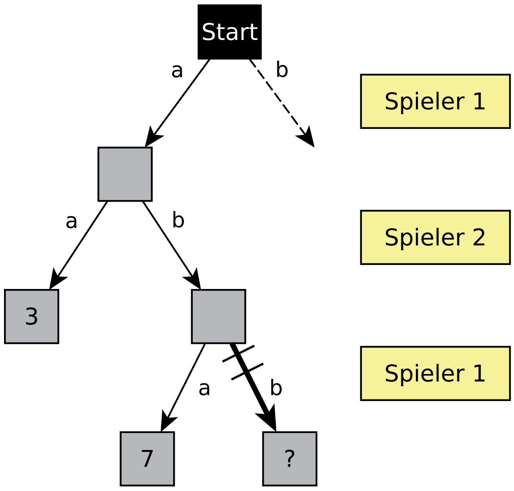

Abbildung 11 Hier kann ein β-Cutoff gemacht werden.

Durch den Alpha-Beta-Algorithmus kann die Performance eines Computer-Programms maßgeblich gesteigert werden, da Züge, die sowieso keinen besseren Positionswert erbringen, nicht mehr trotzdem berechnet werden. In gleicher Zeit können so deutlich mehr Züge berechnet und bewertet werden - das Programm wird beschleunigt.

4 Zukunft der Spieltheorie

Was können wir in den nächsten Jahren von der Spieltheorie erwarten? Einerseits wird die Leistungsfähigkeit von Computerprogrammen, die Spiele gegen uns Menschen spielen, weiter zunehmen. Die Berechnung eines optimalen Zuges im Schach ist momentan technisch noch nicht möglich, da es zu viele verschiedene Spielmöglichkeiten gibt, die in die Berechnung einfließen müssen. Außerdem ist noch nicht erwiesen, ob es eine dominante Strategie für den weißen oder schwarzen Spieler gibt. Angesichts der bisherigen Leistungen ist zu erwarten, dass Spieltheoretiker und Informatiker weitere Methoden finden werden, um die maschinelle Analyse eines Spielbaums zu optimieren. Zudem werden leistungsfähigere Computer die Möglichkeit bieten, noch mehr Rechenoperationen pro Sekunde auszuführen. Diese Erkenntnisse und dieser Technologie-Zuwachs lassen sich auf moderne Spiele wie Computerspiele übertragen. Setzt sich diese Entwicklung fort, wird uns bald in jedem beliebigen Spiel die künstliche Intelligenz der Computer überholen.

Auf der anderen Seite werden neue spieltheoretische Modelle entwickelt werden, die auf den von mir im ersten Teil beschriebenen aufsetzen. Diese sind nötig, um in verschiedensten Situationen des Lebens Empfehlungen über Entscheidungen abzugeben - seien diese wirtschaftlicher, sozialer oder psychologischer Natur. Es müssen immer mehr Parameter einberechnet werden können, um diese Empfehlungen zu verfeinern. Ein stark vereinfachtes Modell reicht nicht mehr aus, um zuverlässige Ergebnisse zu liefern. Ein Anreiz bleibt aber derselbe wie in den Anfängen der Forschung - der Anreiz, Gewinn zu machen.

Schlussendlich würde ich mich freuen, mit dieser Seminararbeit Ihr Interesse an den spannenden Entwicklungen rund um die Spieltheorie geweckt zu haben und Ihnen dazu die passenden Grundlagen mit auf den Weg gegeben zu haben.

5 Anhang

5.1 Literaturverzeichnis

Alus, L. V./Herik, 1, H. J. van den/Huntjens, M. P. H. (1996): GO-MOKU SOLVED BY NEW SEARCH TECHNIQUES, in: Computational Intelligence, Band 12, Ausgabe 1, S. 7-23.

Basieux, Pierre (2008): Die Welt als Spiel. Spieltheorie in Gesellschaft, Wirtschaft und Natur, 1. Auflage, Reinbek.

Bewersdorff, Jörg (2010): Glück, Logik und Bluff: Mathematik im Spiel - Methoden, Ergebnisse und Grenzen, 5. Auflage, Wiesbaden.

Bremer, Lars (2010): Denkspiele und mehr - Vier Gewinnt. `http://www.lbremer.de/viergewinnt.html` (Stand: 10.10.2010).

Eichhorn, Christoph (2004): Der Beginn der Formalen Spieltheorie: Zermelo (1913). `http.://www.mathematik.uni-muenchen.de/~spielth/artikel/Zermelo.pdf` (Stand: 21.06.2004).

Holler, Manfred J./Illing, Gerhard (2005): Einführung in die Spieltheorie, 6. Auflage, Berlin.

Mehlmann, Alexander (1997): Wer gewinnt das Spiel? Spieltheorie in Fabeln und Paradoxa, 1. Auflage, Braunschweig/Wiesbaden.

Mehlmann, Alexander (2007): Strategische Spiele für Einsteiger, 5. Auflage, Wiesbaden.

Naeve, Jörg (2007): Darstellung von Spielen: Extensivform versus Normalform. `http://www.uni-saarland.de/fak1/fr12/albert/files/ss07/Spiel-Folien9.pdf` (Stand: 31.05.2007).

Nobelprize.org (1994): The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 1994. `http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1994/` (Stand: 02.11.2011).

Rieck, Christian (2010): Spieltheorie. Eine Einführung, 10. Auflage, Eschborn.

Schiedsrichterkommission des Deutschen Schachbundes e.V. (2009): Die FIDE-Schachregeln. http://www.schachbund.de/intern/ordnung/FIDE_Regeln09.pdf (Stand: 14.05.2009).

Schlee, Walter (2004): Einführung in die Spieltheorie. Mit Beispielen und Aufgaben, 1. Auflage, Wiesbaden.

Schmidt, Nicolas u. a. (2009): Vier gewinnt. http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~spielth/vortrag/viergewinnt_praesentation.pdf (Stand: 17.02.2009).

Slany, Wolfgang (1999): Graph Ramsey games. DBAI TECHNICAL REPORT DBAI-TR-99-34. http://www.dbai.tuwien.ac.at/ftp/papers/slany/dbai-tr-99-34.ps.gz (Stand: 30.10.11), S. 32f.

Waldmann, Johannes (2002): Kombinatorische Spieltheorie. http://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/edu/ancient/ws01/kst/kst-pub.pdf (Stand: 29.10.2011).

5.2 Bildnachweis

Holst, Michael/Müller, Markus (2011): „Vier gewinnt“ Titelbild.

Alle anderen Grafiken wurden in Eigenarbeit erstellt.

5.3 Anmerkungen

5.3.1 Verwendung des 4theWin-Programms

Auf dem beigelegten USB-Stick befindet sich ein Internet-Browser, über den das von mir entwickelte „Vier gewinnt“-Programm **4theWin** gestartet werden kann. Durch einfaches Klicken können Sie beliebige Spielsituationen erzeugen und mit Klick auf „Optimalen Zug berechnen“ den optimalen Zug für den Spieler, der an der Reihe ist, berechnen lassen.

Leider dauert es aufgrund der begrenzten Rechenleistung eines Computers trotz Alpha-Beta-Optimierung für einige Spiel-Situationen extrem lang (theoretisch bis hin zu Tagen), den besten Zug zu bestimmen. Dies liegt daran, dass es besonders im Anfangsstadium einer Partie sehr viele verschiedene Möglichkeiten für den weiteren Verlauf gibt und der Computer diese durchgehen muss.

Deshalb habe ich einige Beispiel-Situationen aus dem fortgeschrittenen Stadium von verschiedenen Partien zusammengestellt, für die der beste Zug auf jeden Fall in einer annehmbaren Zeitspanne errechnet werden kann. Sie können bei Start des Programms zwischen diesen Situationen auswählen.

Weitere Informationen zur Bedienung des 4theWin-Programms erhalten Sie in der **Liesmich-Datei** auf der Hauptebene des USB-Sticks.

5.4 Eigenständigkeitserklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich meine Seminararbeit ohne fremde Hilfe angefertigt habe und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benützt habe.

München, den 03.11.2011