Dominicus-von-Linprun-Gymnasium Abiturjahrgang 2011/12
V i e c h t a c h

S E M I N A R A R B E I T

Rahmenthema des Wissenschaftspropädeutischen Seminars:

Anwendungen der Mathematik

Leitfach: Mathematik

Thema der Arbeit:

Gruppentheorie am Beispiel des Rubik's Cube

Verfasser/in: Maximilian Klimmer

Kursleiter/in: StR Markus Weiß

Abgabetermin: 08.11.2011

Bewertung	Note	Notenstufe in Worten	Punkte		Punkte
schriftliche Arbeit				x 3	
Abschlusspräsentation				x 1	
				Summe:	
				Gesamtleistung nach § 61 (7) GSO = Summe:2 (gerundet)	

Datum und Unterschrift der Kursleiterin bzw. des Kursleiters

Inhaltsverzeichnis

1. Nur ein Puzzle oder doch höhere Mathematik?

Im 21. Jahrhundert gibt es Wettbewerbe und Weltmeisterschaften nicht nur in traditionellen Sportarten wie Fußball oder in Wintersportarten, sondern auch in abstrakteren Disziplinen, wie beispielsweise dem „Speedcubing“. Viele denken sich jetzt: „Was ist denn das?“ Es ist aber eigentlich ganz einfach zu erklären. Fast jeder weiß, um was es geht, wenn von einem Rubik’s Cube, zu deutsch auch Zauberwürfel genannt, gesprochen wird. Dabei handelt es sich um ein Drehpuzzle, das bei diesen Weltmeisterschaften in möglichst kurzer Zeit gelöst werden muss. Das gilt auch für Abwandlungen, wie das Lösen mit den Füßen, mit verbundenen Augen oder, anstatt eines normalen 3x3x3, eines bis zu 7x7x7 großen Würfels. Der Weltrekord für die herkömmliche Methode liegt bei 5,66 Sekunden und wurde 2011 von dem Australier Feliks Zemdegs (15) aufgestellt. Als ich von diesen Meisterschaften erfahren habe, hat mich der Ehrgeiz gepackt, den Rubik’s Cube selbst zu lösen. Meine ersten Versuche scheiterten. Daraufhin habe ich im Internet recherchiert und auch erläuterte Lösungsmöglichkeiten gefunden. Auf einmal war das Lösen des Würfels kein Problem mehr, was mich persönlich faszinierte. Aus diesem Grund habe ich beschlossen, diese Seminararbeit dem Thema „Gruppentheorie“, dem mathematischen Hintergrund des Puzzles, zu widmen. Im Folgenden möchte ich nun den allgemeinen Gruppenbegriff erklären und auf einfacher Basis zeigen, wie man theoretisch Lösungswege für den Würfel herausfinden und möglicherweise auch berechnen kann.

2. Grundlagen der Gruppentheorie

2.1 Verknüpfungen auf einer Menge

Man benötigt in der Mathematik bestimmte Voraussetzungen, um überhaupt rechnen zu können. Zum einen braucht man eine Grundmenge G, mit deren Elementen gerechnet wird und zum anderen eine Rechenoperation, wodurch die Elemente miteinander verbunden werden und so ein eindeutig definiertes Ergebnis liefern. Zur Vereinfachung verwenden wir statt dem Begriff „Rechenoperation" die Bezeichnung „Verknüpfung" und stellen sie mit dem allgemeinen Zeichen $\circ$ dar. Die Grundmenge und die darauf definierte Verknüpfung haben oft eine oder mehrere der folgenden Eigenschaften:

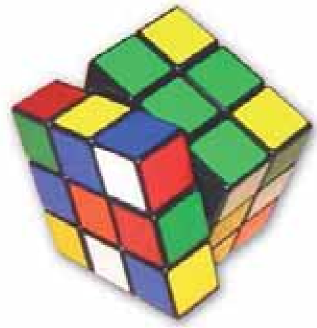

Abb. 1: Rubiks Cube als Anwendungsbeispiel einer Gruppe

1. Abgeschlossenheit

„ G heißt abgeschlossen bezüglich einer Verknüpfung $\circ$, wenn für jedes a, b $\in$ G auch a $\circ$ b wieder ein Element von G ist." [1]

z.B. $a \cdot b = ab$

2. Assoziativität

„Die Verknüpfung $\circ$ auf G heißt assoziativ, wenn für alle a, b, c $\in$ G gilt:

$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ "[2]

z.B. $a + (b + c) = (a + b) +c$

3. Existenz eines neutralen Elements

„Das Element n $\in$ G heißt neutral bezüglich der Verknüpfung $\circ$, wenn für alle a $\in$ G gilt:

$n \circ a = a \circ n = a$

Das bedeutet, dass die Verknüpfung mit n nichts Neues ergibt, es verhält sich also neutral"[3]

z.B. $0 + a = a + 0$ oder $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

[1] Komplexe Zahlen; Helmut Dittmann; 1974; S. 9
[2] ebd. S. 10
[3] ebd. S. 10

4. Existenz eines inversen Elements

„Es sei auf G eine Verknüpfung definiert, für welche es ein neutrales Element n gibt. Man nennt die Elemente a und b invers zueinander, wenn $a \circ b = b \circ a = n$ gilt.“[4]

z.B. $a + (-a) = (-a) + a = 0$

$a^{-1} \cdot a = 1$

5. Kommutativität

„Eine Verknüpfung $\circ$ ist kommutativ, wenn für alle $a, b \in G$ gilt:
$a \circ b = b \circ a$”[5]

z.B. $a + b = b + a$

Man nennt eine nicht leere Menge, auf der eine Verknüpfung definiert ist, eine Gruppe $(G, \circ)$, wenn die Eigenschaften 1 – 4 erfüllt sind. Diese vier Eigenschaften werden deshalb als Gruppenaxiome bezeichnet. Die Kommutativität wird dabei vernachlässigt, da sie den Begriff der Gruppe zu stark einschränken würde. Gilt jedoch auch diese Eigenschaft wird die Gruppe als *kommutativ* oder *abelsch* bezeichnet.

2.2 Definition eines Körpers

Def. 1: Körper

„Eine Menge K mit wenigstens 2 Elementen heißt Körper, wenn auf ihr zwei Verknüpfungen, eine Addition + und eine Multiplikation · , definiert sind und folgendes gilt:

1. (K, +) ist eine kommutative Gruppe mit dem neutralen Element 0 (additive Gruppe des Körpers).
2. $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe mit dem neutralen Element 1 (multiplikative Gruppe des Körpers).
3. Distributivität
   Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $a (b + c) = ab + ac$“[6]

[4] Komplexe Zahlen; Helmut Dittmann; 1974; S. 10
[5] ebd. S. 11
[6] ebd. S. 14

2.3 Der Körper der Rationalzahlen $\mathbb{Q}$

Im Laufe der Zeit wurde die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ immer wieder erweitert, da sie bestimmte Unvollkommenheiten aufwies. Diese Entwicklung kann auch im Bezug auf eine Gruppe nachvollzogen werden.

Die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ ist bezüglich der Grundverknüpfungen der Addition und der Multiplikation abgeschlossen und noch dazu kommutativ und assoziativ. Das neutrale Element ist für die Multiplikation auch enthalten (1). Das neutrale Element für die Addition (0) und die inversen Elemente sowohl bezüglich der Addition (d.h. die negativen Zahlen) als auch bezüglich der Multiplikation (d.h. die Stammbrüche) fehlen.

Die natürlichen Zahlen werden deshalb erweitert und es entsteht die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

In dieser Zahlenmenge gilt für beide Verknüpfungen wieder Abgeschlossenheit, Kommutativität und Assoziativität. Außerdem existiert in $\mathbb{Z}$ nun ein neutrales Element gegenüber der Addition und zu jedem Element a ein inverses – a bezüglich der Addition.

So fehlen nur noch die inversen Elemente bezüglich der Multiplikation.

„Aus $\mathbb{Z}$ entsteht so durch neuerliche Erweiterung der sog. *Körper der Rationalzahlen $\mathbb{Q}$*, das ist die Menge aller Zahlen, die sich durch einen Bruch $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ darstellen lassen. (...) ...so können wir die Struktur von $\mathbb{Q}$ durch zwei Gruppen beschreiben, welche zu den beiden Grundverknüpfungen + und · gehören:

$(\mathbb{Q}, +)$ ist die sog. additive Gruppe des Körpers der Rationalzahlen. Sie ist kommutativ; ihr neutrales Element ist 0.

Dagegen ist $(\mathbb{Q}, \cdot)$ keine Gruppe; denn es existiert zwar ein neutrales Element 1 in $\mathbb{Q}$, aber es gibt ein Element in $\mathbb{Q}$, zu dem es kein Inverses gibt; nämlich 0. Entfernt man die 0 aus der Menge $\mathbb{Q}$, so entsteht eine Menge, die wir mit $\mathbb{Q}\setminus \{0\}$ bezeichnen. Dann ist $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$ die sog. multiplikative Gruppe des Körpers $\mathbb{Q}$. Sie ist ebenfalls kommutativ; neutrales Element ist 1.“[7]

[7] Komplexe Zahlen; Helmut Dittmann; 1974; S 13

2.4 Körper mit endlich vielen Elementen

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Abb. 2: Verknüpfunstafel einer Addition

Es gibt außer $\mathbb{Q}$ noch viele andere Körper, sogar mit endlich vielen Elementen. Diese können durch so genannte Verknüpfungstafeln dargestellt werden.

In der nebenstehenden Abbildung ist die additive Verknüpfung auf die Menge K = {0, 1, 2, 3, 4} dargestellt. Diese Art von Verknüpfung wird als *Addition modulo 5* bezeichnet und man findet das Ergebnis, indem man normal addiert und die erhaltene Zahl durch die Anzahl der Elemente in der Grundmenge (hier 5) teilt. Der dabei übrig bleibende Rest ist das Ergebnis.[8] Das neutrale Element 0 ist dabei auch recht schön zu erkennen, da in der Spalte bzw. Zeile der 0 die geordnete Reihe 0, 1, 2, 3, 4 steht. Die inversen Elemente sind daran zu sehen, wo das neutrale Element 0 steht. So ist zum Beispiel 1 das Inverse von 4 oder 2 das Inverse von 3.

Diese Verknüpfungstafel zeigt eine *Multiplikation modulo 5.* Dabei wird genau so verfahren wie bei der Addition in Abbildung 2. Da bei einer Multiplikation das neutrale Element 1 ist, steht die geordnete Reihe 0, 1, 2, 3, 4 nun in der Spalte bzw. Zeile der 1. Hier sieht man die inversen Elemente dort, wo das neutrale Element 1 steht. Aus diesem Grund ist zum Beispiel 2 das Inverse von 3. Da diese beiden Verknüpfungen auf die Menge K ={0, 1, 2, 3, 4} definiert sind, handelt es sich hierbei um einen Körper.[9]

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Abb. 3: Verknüpfungstafel einer Multiplikation modulo 5

[8] vgl. Komplexe Zahlen; Helmut Dittmann; 1974; S. 15
[9] vgl. ebd. S. 15

3. Die Permutationsgruppe

Def. 2: Permutation

„Eine Permutation ist die Umordnung einer geordneten Liste *L* (= Anordnung) von *n* Elementen“[10]

Im Folgenden werden nun ein paar Beispiele für geordnete Listen betrachtet und diese umgeordnet. Zum Anfang nehmen wir das ziemlich einfachste Beispiel mit nur zwei Elementen:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ in der oberen Zeile steht die geordnete Liste und darunter die Permutation davon. Da es in diesem Fall nur 2 Elemente sind, gibt es auch nur 2! (d.h. $2 \cdot 1 = 2$) Permutationen, nämlich die Reihenfolge 1, 2 und die umgedrehte 2, 1.

Das nächste Beispiel hat nun sechs Elemente:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ Dieses mal gibt es zu der geordneten Liste 1, 2, 3, 4, 5, 6 schon 6! (d.h. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$) Permutationen, welche ich hier nicht alle aufführen kann. Überträgt man dieses Prinzip auf die Geometrie, betrachtet man Translationen (=Verschiebungen), Rotationen und Spiegelungen[11]

Als nächstes wird nun die Hintereinanderausführung von Permutationen betrachtet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Um auf dieses Ergebnis zu kommen beginnt man bei der rechten Klammer vor dem Ist-Gleich-Zeichen. Man geht nach folgendem Schema vor: Die 1 wird auf die 6 abgebildet, dann die 6 auf die 2 (linke Klammer) , also wird insgesamt die 1 auf die 2 abgebildet;

Die 2 auf die 4, die 4 auf die 1 also insgesamt die 2 auf die 1 usw.[12]

---

[10] http://www.cgogolin.de/downloads/grt.notes.pdf
[11] vgl. Algebra Teil 1; Dr. Kurt Meyberg; 1980; S.31
[12] vgl. ebd. S. 31

Def. 3: Permutationsgruppe

„Die Menge $\{pi\}^{n!}$ aller Permutationen *pi*, welche aus einer beliebigen Anordnung von *n* Elementen alle *n*! Anordnungen erzeugen, bildet zusammen mit der Hintereinanderausführung $\circ$ die Permutationsgruppe“ [13]

Ein Beispiel für inverse Elemete der Gruppe sind zum Beispiel:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ist inverses Element zu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ weil die Hintereinanderausführung der beiden das neutrale Element $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ergibt.[14]

[13] http://www.cgogolin.de/downloads/grt.notes.pdf
[14] vgl. Algebra Teil 1; Dr. Kurt Meyberg; 1980; S.31

4. Anwendung der Gruppentheorie auf den Rubik's Cube

4.1 Was ist ein Rubik's Cube?

Der Rubiks Cube (auch Zauberwürfel genannt) ist ein Drehpuzzle. Auf den ersten Blick besteht er aus 27 Einzelwürfeln, die zusammen einen großen 3x3x3 Würfel bilden. Bei

Abb. 4: Die drei verschiedenen Bauteile des Rubiks Cube

genauerem Betrachten erkennt man, dass der Würfel eigentlich nur aus 21 Teilen besteht:
ein Achsensystem aus 6 unterschiedlich farbigen Mittelstücken, 12 zweifarbigen Kantenstücken und 8 dreifarbigen Eckstücken. Die Anordnung der einzelnen Farben zueinander kann nicht verändert werden, da sie durch die Mittelteile vorgegeben wird und diese durch das Achsensystem festgelegt sind. Die anderen Steine sind dagegen frei drehbar.
„Jeder Stein eines Rubiks Cubes in jeder möglichen Konfiguration hat genau zwei Parameter. Seine Permutation, d.h. seine Position auf dem Würfel, und seine Orientierung. Ecken haben drei mögliche Orientierungen (z.B. gelber Aufkleber oben/vorne/rechts), Kanten haben zwei mögliche Orientierungen"[15] Das Ziel des Puzzles ist es die ursprüngliche Anordnung (jede Seite des 3x3x3 Würfels besitzt genau eine Farbe) wieder herzustellen.

4.2 Algorithmen

Am Würfel gibt es 12 Basisdrehungen. Jede Seite des Würfels (U (up), L (left),
F (front), R (right), B (back) und D (down)) kann im und gegen den Uhrzeigersinn gedreht werden. Wenn die Seite gegen den Uhrzeigersinn gedreht wird, erkennt man das an dem Apostroph (U', L', F', R', B' und D').

[15] http://matheplanet.com/default3.html?article=1154

Diese 12 Abkürzungen werden in Zugfolgen, den so genannten Algorithmen, aufgeschrieben. Ein Beispiel für einen komplexen Algorithmus ist der in Fachkreisen getaufte superflip mit der Zugfolge:

R’ U U B L’ F U’ B D F U D’ L D D F’ R B’ D F’ U’ B’ U D’

Dieser superflip macht es möglich, die Orientierung aller 12 Kantenstücke zu tauschen, jedoch nicht ihre Permutation. Außerdem bleiben alle Ecken an ihrem richtigen Platz.

4.3 Die Cube Gruppe

4.3.1 Definition der Cube Gruppe

Def. 4 : Cube Gruppe

„Sei M = { 1, 2, ..., 48 } die Menge der Aufkleber des Rubik's Cubes und R,L,U,D,F,B $\in S_M$ seien die sechs Basisdrehungen. Dann heißt die Permutationsgruppe, die von den sechs Basisdrehungen erzeugt wird, G = <R,L,U,D,F,B> die Rubik's Cube Group und es gilt
$G \subset S_M = S_{48}$. Wie die meisten Permutationsgruppen ist G nicht abelsch.“ [16]

Die Anzahl an möglichen Stellungen des Würfels berechnet sich so:

$$\frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 43.252.003.274.489.856.000$$

Diese Formel ergibt sich folgendermaßen:

Zähler:
- 8 verschiedene Permutationen, die ein Eckstein besitzen kann. (8!)
- 3 verschiedene Orientierungen, die ein Eckstein besitzen kann.(3^8)
- 12 verschiedene Permutationen, die ein Kantenstein Besitzen kann. (12!)
- 2 verschiedene Orientierungen, die ein Kantenstein besitzen kann. (2^{12}) [17]

[16] http://matheplanet.com/default3.html?article=1154
[17] vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Rubiks_Cube

Nenner:

- „Wenn eine Kante verdreht ist, dann ist immer eine weitere Kante verdreht (2)
- Es lassen sich weder allein zwei Eckwürfel vertauschen, noch lassen sich allein zwei Kanten vertauschen. Die Anzahl der paarweisen Zweiertäusche muss immer gerade sein (2).
- Wenn ein Eckwürfel verdreht ist, dann ist immer eine weitere Ecke verdreht (3)“ [18]

Diese Anzahl entspricht gleichzeitig der Ordnung der Cube Gruppe. Sie ist um 1 größer als eine Primzahl, das heißt die Anzahl ohne die Stellung, in der der Würfel richtig ist, ist prim.[19]

Um die weiteren Vorgänge besser erklären zu können, wird nun ein Netz des Rubiks Cube aufgezeichnet und alle Felder mit den Zahlen von 1 – 48 nummeriert. Da die Mittelstücke sowieso nicht permutiert werden können, werden diese ignoriert und mit U, L, F, R, B und D beschriftet.

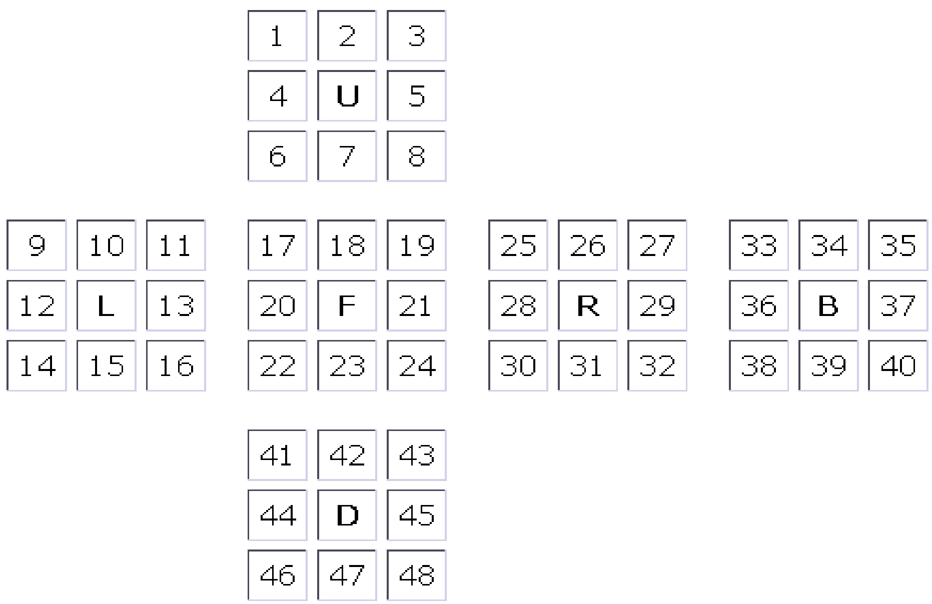

Abb. 5: beschriftetes Netz eines Rubiks Cube

Die folgenden Viererpaare zeigen, welche Kanten (zweite und vierte Klammer) bzw. Ecken (erste, dritte und fünfte Klammer) sich beim Drehen der Vorderseite (front) vertauschen.

[18] http://de.wikipedia.org/wiki/Rubiks_Cube
[19] vgl. http://matheplanet.com/default3.html?article=1154

F = (17, 19, 24, 22) (18, 21, 23, 20) (6, 25, 43, 16) (7, 28, 42, 13) (8, 30, 41, 11)
Dreht man die Frontseite also um 90°, so wandert die Zahl 17 auf die Stelle der 19, die 19 auf 24, die 24 auf 22 und die 22 auf die ursprüngliche Stelle der 17. Alle bei dieser Drehung beteiligten Einzelseiten tauschen so zyklisch ihren Platz. Es permutieren also auch die Kantenstücke 18, 21, 23, 20.
So ergibt sich, dass nach viermaligem Drehen, also um 360°, wieder die ursprüngliche Anordnung vorzufinden ist. Der Algorithmus einer Basisdrehung, also zum Beispiel F F F F, hat die Ordnung 4.

4.3.2 Berechnung der Ordnung von Algorithmen

Man kann jedoch auch bestimmen, wie oft man einen Zweieralgorithmus ausführen muss, um wieder den gelösten Würfel zu erhalten. Nun wird vom Algorithmus R U ausgegangen.

Berechnung:
Order(RU) = Order((1, 3, 38,43,11,35,27,32,30,17,9,33,48,24,6)
(2, 5, 36, 45, 21, 7, 4)
(8, 19, 25)
(10, 34,26, 29, 31, 32, 18))
= kgV (15, 7, 3, 7) = 105

Die erste Klammer enthält 15 Elemente, welche fünf der sechs beteiligten Ecken darstellen.
So entsprechen die Zahlen 6, 11 und 17 dem Eck links, oben, vorne. Die dritte Klammer ist das sechste Eck. Es wird extra gezählt, da dieses Eck während des gesamten Drehvorgangs zwar verschiedene Orientierungen hat, aber immer die gleiche Permutation besitzt. Die beiden übrigen Siebenerpaare stellen die sieben beteiligten Kantenstücke dar, wobei jede Kante pro Klammer nur einmal gezählt wird. Die Zahl 21 aus der zweiten und 28 aus der vierten Klammer beschreiben also die rechte vordere Kante.
Aus diesen Anzahlen der Elemente pro Klammer wird nun das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) gebildet. In diesem Fall ist das kgV von 15, 7, 3 und noch mal 7 105.
Der Algorithmus R U hat also die Ordnung 105.[20]

[20] vgl. http://matheplanet.com/default3.html?article=1154

Dieses Verfahren wird nun auf einen Dreieralgorithmus ausgeweitet. Exemplarisch wird die Zugfolge U R D betrachtet.

Berechnung:

Order(URD) = Order((1, 9, 35, 3, 27, 33, 6, 11, 17, 24, 30, 43, 14, 40, 46, 16, 22, 41)
(2, 4, 5, 7, 21, 29, 31, 23, 15, 39)
(8, 19, 25, 32, 28, 48)
(10, 18, 26, 34, 28, 36, 45, 42, 44, 47))
= kgV (18, 10, 6, 10) = 90

Bei dieser Berechnung ist das Vorgehen genau gleich, jedoch gibt es hier 2 Ecken die während des Drehvorgangs ihre Permutation nicht ändern.

Beim nächsten Versuch werden nun alle sechs Seiten nacheinander um 90° im Uhrzeigersinn gedreht. Der Algorithmus ist also : U R D L F B

Berechnung:

Order(URDLFB) = Order((3, 27, 33, 24, 30, 43, 6, 11, 17, 14, 40, 46)
(2, 4, 5, 7, 21, 29, 37, 13, 15, 23, 31, 39)
(8, 19, 25, 32, 38, 48, 1, 9, 35, 16, 22, 41)
(10, 18, 26, 34, 20, 28, 36, 12, 42, 44, 45, 47)
= kgV (12, 12, 12, 12) = 12

Da dieses Mal alle Einzelseiten an den Drehungen beteiligt sind, ist jede Zahl von 1 – 48 einmal in der Berechnung erwähnt. Dieses Mal liegen 4 Ecken vor, die separat von den anderen vier notiert werden. Da nun in allen Klammern zwölf Elemente enthalten sind, ist der Hauptnenner 12 leicht herauszufinden.

4.4 Konjugation und Kommutatoren

Um neue Zugfolgen für bestimmte Probleme finden zu können, benötigt man das Konzept der Konjugation und die Bildung von Kommutatoren.

Das Konzept der Konjugation beruht darauf, durch bekannte Problemlösungen auf andere zu schließen. Ein Beispiel dafür ist U R U'. Man sagt das ist die Konjugation von R mit U. Zu erklären ist dieses Prinzip so:
Es wird eine Drehung ausgeführt, dann eine zweite und anschließend die erste rückgängig gemacht. So ist es möglich die Permutation eines Steins, der eigentlich mit der bekannten Problemlösung nichts zu tun hat, so hinzudrehen, dass auch das Problem für diesen Stein gelöst ist. In Fachkreisen wird die Konjugation meist als "Setup Move" bezeichnet.[21]
Als konkretes Beispiel gehen wir davon aus, wir wissen bereits wie man drei Ecksteine der oberen Ebene zyklisch vertauscht. Nun ist es uns möglich, beliebige drei Ecken am Würfel zu vertauschen. Sie müssen vorher nur noch an die richtigen Plätze gebracht werden, damit unser Zug funktioniert.[22]

Kommutatoren werden benötigt, um durch minimales Ändern des Würfels eine günstigere Ausgangssituation für weitere Algorithmen zu erreichen. Ein Beispiel für einen Kommutator ist [U, D] = U' D' U D. Man sagt das ist der Kommutator von U und D.
Bei diesem Beispiel kommutieren die beiden Drehungen, deshalb ist der Kommutator das neutrale Element. Verwendet man dagegen zwei „fast" kommutierende Drehungen, wird dadurch wenig verändert aber, wie gesagt, vielleicht eine bessere Ausgangsposition erreicht.
Der Kommutator von zwei Basisdrehungen an benachbarten Seiten bewirkt:

[U, R] [U, R]	permutiert drei Kanten und keine Ecke
[U, R] [U, R] [U, R]	permutiert zwei Eckenpaare und keine Kante[23]

Diese beiden Prinzipien werden ausgenutzt, um lange Algorithmen für komplexe Probleme zu entwickeln. Ein Beispiel dafür ist der schon in 4.2 erwähnte superflip.

[21] vgl. http://matheplanet.com/default3.html?article=1154
[22] vgl. ebd.
[23] vgl. ebd.

5. Rubik’s Cube – Lösung mit System

Nach vorherigen Ausführungen ist es wohl nicht möglich, das Drehpuzzle durch Ausprobieren im Sinne von Speedcubing, d.h. möglichst schnell und möglichst wenig Drehungen, zu lösen. Seit der Erfindung des Würfels wurden viele verschiedene Möglichkeiten zur Lösung gefunden. Dazu bedarf es genaueren Betrachtungen der Mathematik, um die kürzesten und somit schnellsten Lösungswege zu berechnen.
Mein Resümee lautet:

„Ja, es handelt sich beim Rubik’s Cube um höhere Mathematik“

6. Quellenangaben

6.1 Literaturverzeichnis

6.1.1 Bücher

- **Helmut Dittmann**
  Komplexe Zahlen
  Erscheinungsjahr, -ort: 1974, München
  Verlag: Bayrischer Schulbuch-Verlag

- **Dr. Kurt Meyberg**
  Algebra
  Teil 1
  2. Auflage
  Erscheinungsjahr, -ort: 1980, München, Wien
  Verlag: Carl Hanser Verlag München Wien

6.1.2 Internetbeiträge

- **Christian Gogolin**, Die Permutationsgruppe und ihre Bedeutung für die Theorie endlicher Gruppen
  http://www.cgogolin.de/downloads/grt.notes.pdf
  Stand: 10.01.2008
  Aufrufdatum: 08.10.2011
- http://matheplanet.com/default3.html?article=1154
  Stand: 06.02.2008
  Aufrufdatum: 19.10.2011
- http://de.wikipedia.org/wiki/Rubiks_Cube
  Stand: 03.11.2011
  Aufrufdatum: 06.11.2011

6.2 Abbildungsverzeichnis

- **Abbildung 1:**
  http://de.wikipedia.org/wiki/Zauberw%C3%BCrfel
  Stand: 18.10.2011
  Aufrufdatum: 26.10.2011
- **Abbildung 2 + 3:**
  selbsterstellte Abbildungen mit dem Programm Microsoft Excel
- **Abbildung 4:**
  http://de.wikipedia.org/wiki/Zauberw%C3%BCrfel
  Stand: 18.10.2011
  Aufrufdatum: 08.09.2011
- **Abbildung 5:**
  http://matheplanet.com/default3.html?article=1154
  Stand: 06.02.2008
  Aufrufdatum: 19.10.2011

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Seminararbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen als Hilfsmittel benutzt habe.

Ort, Datum

Unterschrift